INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
LABORATOIRE D'ENERGETIQUE ET DE MECANIQUE THEORIQUE ET APPLIQUEE

# THESE

présentée à

l'Institut National Polytechnique de Lorraine

pour l'obtention du

DOCTORAT DE L'INPL
en Sciences du Bois

par

Pierre Antoine BORDONNE

Sujet

# MODULE DYNAMIQUE ET FROTTEMENT INTERIEUR DANS LE BOIS
# MESURES SUR POUTRES FLOTTANTES EN VIBRATIONS NATURELLES

Soutenue publiquement le 13 Avril 1989, devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

| | |
|---|---|
| Président : | P. MARTIN |
| Rapporteurs : | B. THIBAUT |
| | T. VINH |
| Examinateurs : | P. GUENEAU |
| | D. GUITARD |
| | P. MORLIER |
| | C. SALES |

# AVANT - PROPOS

Je remercie Daniel Guitard, pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de mon travail, pour ses conseils, pour sa patience et pour ses encouragements. Je lui suis particulièrement reconnaissant de la liberté qu'il m'a accordé pour la présentation de ce document, bien qu'il l'aurait préférée plus "mécanicienne" et illustrée d'exemples plus "rhéologiques".

C'est au cours que professe Patrick Martin au DEA "Sciences du Bois", que je dois mon initiation (ma vocation ?) aux essais de caractérisation des propriétés mécaniques du bois. C'est Christian Sales qui m'a appris à informatiser les procédures de ces mêmes essais. Je les remercie tous deux pour cette contribution à mon expérience personnelle.

Je remercie Bernard Thibaut, qui est à plusieurs titres mon "ancien", et Tuong Vinh, qui a fait vibrer bien des poutres bien avant moi, d'avoir bien voulu être les rapporteurs de mon jury.

Je suis trés heureux de la participation à mon jury de Pierre Morlier, en son expérience de premier Directeur du Groupement Scientifique "Rhéologie du Bois".

Je remercie Paul Guéneau d'avoir accepté de représenter le Centre Technique Forestier Tropical au sein du jury.

Ce travail est une part de l'activité d'Ingénieur de Recherche en Mécanique du Bois que j'ai exercé au CTFT de 1984 à 1988. Il n'aurait pu être achevé à la *Division Physique, Mécanique et Usinage* sans le secours de Pierre Ceyriac que je tiens à remercier. Je souhaite également que Monique Bellot, Jacques Grossmann, Simone Lowinger, Hélène Marfaing et André Marouteix soient assurés de ma gratitude pour leur aide.

Je remercie également Lucien Trong pour sa participation à l'étude des attaques fongiques.

C'est au Japon que j'ai découvert l'expérimentation basée sur le mariage d'un enregistreur numérique de transitoires et d'un calculateur : je n'oublierai pas l'excellent accueil qui m'a été réservé à l'Université de Nagoya par Takashi Okuyama et Yoji Kikata, ainsi que par tous leurs collaborateurs au sein du laboratoire Wood Physics.

Je suis également très redevable à Nobuo Sobue, qui a considérablement influencé mon travail en me transmettant son savoir-faire, lors de mon séjour à l'Université de Nagoya.

MODULE DYNAMIQUE ET FROTTEMENT INTERIEUR DU BOIS SANS DEFAUT

MESURES SUR POUTRES FLOTTANTES EN VIBRATIONS NATURELLES


## RESUME

*Le bois, en raison de sa structure particulière et de sa composition polymérique, est regardé comme un matériau orthotrope cylindrique et viscoélastique linéaire dans le domaine des petites perturbations.*

*Deux procédures expérimentales ont été mises au point, qui permettent de caractériser le comportement du bois au moyen de sollicitations acoustiques.*

*Les procédures peuvent être appliquées notamment aux éprouvettes parallélépipèdiques spécifiées par les Normes Françaises pour le bois et ses dérivés. Elles ont en commun une chaine d'acquisition composée d'un enregistreur numérique de transitoires couplé à un micro-ordinateur, pour lequel des programmes spécifiques ont été développés.*

*La première procédure permet une détermination parfaitement reproductible du module d'Young dynamique, par interprétation du spectre des fréquences des vibrations naturelles d'une poutre. L'influence de la déformabilité en cisaillement étant automatiquement prise en compte lors du dépouillement (suivant de près le modèle de Timoshenko), la procédure s'applique de manière fiable aux poutres droites de section rectangulaire et d'élancements variés.*

*La seconde procédure permet d'évaluer les frottements intérieurs par l'étude de l'amortissement des vibrations naturelles. Après enregistrement à intervalle de temps constant, on obtient, par ajustement à une exponentielle décroissante de l'enveloppe d'un mouvement propre, le décrément logarithmique de l'amplitude.*

*Les essais de validation dont les résultats sont présentés ont porté particulièrement sur des bois tropicaux de différentes masses volumiques, stabilisés en environnement standardisé.*



## MOTS CLES

BOIS ; ACOUSTIQUE ; VISCOELASTICITE LINEAIRE ;
TRANSFORMEE DE FOURIER ; MODULE D'YOUNG ;
VIBRATIONS NATURELLES ; DECREMENT LOGARITHMIQUE ;
ESSAIS NON-DESTRUCTIFS ;

**DYNAMIC YOUNG'S MODULUS AND INTERNAL FRICTION IN CLEAR WOOD**

**MEASUREMENTS FROM FREE VIBRATIONS OF FREE-FREE BEAMS**


## SUMMARY

*Wood, from its structural symmetries and polymeric constitution, is considered as a cylindrically orthotropic and linear viscoelastic material in the range of low stress levels.*

*Two experimental devices have been designed in order to caracterize wood behavior through sollicitations in the acoustic range.*

*Testing methods can be applied to small clear wood specimen such as those required by French Standards for wood and wood composites. In both, recording and computation are performed using a digital transient recorder inserted in a personal computer.*

*Young's modulus is calculated from resonance frequencies of the specimen, computed from FFT spectrum of free vibrations of a beam, with simple end conditions (free-free). In case of flexural vibrations, the influence of shear is taken into account during calculation (in accordance with Timoshenko theory), so that the testing method can be trustfully applied to almost any beam with rectangular cross-section, even with low span to thickness ratio.*

*Internal friction is evaluated by the logarithmic decrement of a particular mode of free vibrations. After the cut off of excitation, the damping is digitally recorded and the damping is characterized by fitting with an exponential function.*

*Most experimental results reported have been obtained with tropical hardwood specimen, with various mass gravities after conditioning in standard environment.*



## KEYWORDS

WOOD ; ACOUSTICS ; LINEAR VISCOELASTICITY ;
FOURIER TRANSFORM ; YOUNG'S MODULUS ;
FREE VIBRATIONS ; LOGARITHMIC DECREMENT ;
NON-DESTRUCTIVE TESTS ;

# SOMMAIRE

# ( CONTENTS )

# INTRODUCTION

> BOIS n.m. ( bas lat. boscus, germ. bosk ).
> Substance compacte de l'intérieur des arbres, formée de cellules, de fibres et de vaisseaux transportant la sève brute. (...)
>
> Assurant le soutien du système foliaire des plantes vivaces, le bois est en outre, même de nos jours, la principale matière première de l'industrie : les bois ouvrés servent en charpente, menuiserie, planchers, ébenisterie, boissellerie, caisserie, marqueterie, tonnellerie, boisage de mines, traverses de chemin de fer ; (...)

Cette définition, qui figure dans les éditions récentes du *Petit Larousse*, fait apparaître en premier lieu ce qui distingue le bois de la plupart des matériaux usuels, c'est-à-dire une structure cellulaire particulière.

La liste des constituants macrocellulaires n'y est pas exhaustive ; il est néammoins remarquable qu'à l'intérieur d'un ordre végétal donné (angiosperme ou gymnosperme), il existe effectivement un nombre limité de types de cellules communes à tous les bois.

La variabilité du matériau est mise en évidence par l'énumération de ses possibles utilisations ; cette approche ne correspond toutefois qu'imparfaitement à la description de la ressource. En effet, dans la plupart des cas, la dénomination d'un bois en terme d'essence forestière est définie en rapport avec l'espèce botanique de l'arbre dont il constitue l'intérieur du tronc.

Ainsi, *c'est l'observation du phénomène de fructification qui conduit au choix d'une nomenclature pour une essence.* A cette règle, il y a au moins deux exceptions qui méritent d'être soulignées:

- Premièrement, l'examen du bois par le xylologue peut conduire à remettre en cause la classification floristique d'espèces rares et difficiles d'accès pour le botaniste. En effet, la description détaillée de la structure cellulaire (arrangement et proportion des différents types de cellules, aspect des parois et des ponctuations cellulaires) corrobore le plus souvent la classification botanique des genres. Cette description est grandement facilitée par la notion de plan ligneux.

- Deuxièmement, la dénomination botanique d'un bois est, dans certaines régions, considérée comme étant d'un intérêt marginal, surtout lorsqu'il y a abondance relative de l'essence correspondante.

Cette deuxième exception, qui tend à se développer, peut être observée dans le cas de certaines dénominations commerciales (ex: "Bois du nord" en Europe, "LAUAN" en Asie). Dans le cas de volumes importants, plusieurs essences peuvent être regroupées sous la même dénomination qui a alors un caractère relatif à leurs emplois usuels.

En règle générale, le bois-matériau fait l'objet d'au moins une transaction commerciale : le propriétaire forestier (état, collectivité ou particulier) ne fait pas spécifiquement usage du matériau issu des arbres abattus sur sa propriété. La pratique, aujourd'hui décriée par les gestionnaires forestiers, qui consiste à sauvegarder durablement certains arbres malgré l'exploitation en taillis d'une parcelle fait néanmoins exception à la règle. Ces "réserves" de taillis sous futaie étant en quelque sorte l'assurance dégâts-habitation des propriétaires.

Lors d'une transaction, un compromis doit être trouvé entre quantité et qualité. L'importance du prix par unité de volume dans les échanges est considérable et peut donner naissance à une pratique pernicieuse du surdimensionnement que la variabilité ou la présence de défauts ne saurait justifier (voir les madriers sur certaines cheminées décoratives de style rustique !). L'utilisateur doit poser le problème de l'adéquation qualité-emploi, de manière à choisir au sein de l'offre, le matériau le mieux adapté au moindre coût, quitte à mettre le bois en concurrence avec d'autres matériaux.

Naturellement, il en va tout autrement dans le cas des espèces dites précieuses, lesquelles sont recherchées soit par tradition, soit pour leurs qualités esthétiques. La rareté de la ressource se conjugue alors à un souci d'authenticité pour fixer le niveau d'exigence des partenaires commerciaux.

L'adéquation qualité-emploi peut être évaluée sur la base d'un ensemble de critères plus ou moins objectifs.

Les performances font partie du groupe des critères les moins subjectifs, ne serait-ce que parce que leur évaluation peut être effectuée au moyen de procédures d'essais standardisées (propriétés technologiques, durabilité etc...), à la différence de certains critères esthétiques (bois flammés, moirés, drapés, rubanés et autres ...).

Chacune de ces procédures a cependant un "domaine d'application" (par exemple: bois sans défaut) qui fixe les limites de sa représentativité par rapport à l'ensemble d'une ressource (en général pour une essence donnée).

Les performances mécaniques d'un matériau s'évaluent en mesurant la réponse d'un échantillon à une sollicitation connue. On peut en distinguer deux grandes familles, suivant que la sollicitation occasionne un effet permanent (par exemple : rupture) ou un effet recouvrable.

Le présent mémoire porte sur deux essais de caractérisation du comportement mécanique du bois ayant le même domaine d'application et permettant l'utilisation d'éprouvettes identiques qui peuvent être celles que les Normes Françaises spécifient pour les essais de flexion statique.

VIBRATION NATURELLE : Mouvement périodique non entretenu d'un système matériel autour de sa position d'équilibre.

POUTRE FLOTTANTE : poutre en chute libre.

Les poutres considérées ici, sont homogènes et de section rectangulaire uniforme à l'état de repos. Typiquement, elles sont bien orientées, c'est-à-dire que l'axe de la poutre coïncide avec l'une des directions principales d'anisotropie de la structure du bois.

Cette étude a été délibérément limitée au cas des poutres flottantes, d'une part parce que le raisonnement est transposable à d'autres structures simples (poutres encastrées etc ...) et que d'autre part, il nous conduit à une configuration expérimentale facile à manipuler et optimisant la reproductibilité des essais.

Les vibrations envisagées sont des petites perturbations d'un système au voisinage de son état naturel.

En première approximation, en faisant l'hypothèse du comportement élastique, une approche analytique montre qu'il est possible de décomposer les vibrations naturelles en mouvements harmoniques, ceux-ci étant deux à deux indépendants et caractérisés par leurs fréquences "propres".

La discussion porte sur les relations entre les fréquences propres et les propriétés mécaniques du matériau, dans le cas d'une poutre dont les caractéristiques géométriques sont données. En ce qui concerne les vibrations transversales dans les poutres finies anisotropes, on adopte une description des mouvements qui fait dépendre les fréquences propres de deux complaisances élastiques et d'un facteur de forme.

L'étude de ce phénomène conduit à mettre en valeur une approximation qu'il est possible d'intégrer, dans un unique programme d'acquisition et de traitement du signal, à la suite du calcul du spectre des fréquences propres par FFT, de manière à calculer le module d'Young d'une poutre en bois en éliminant les effets du cisaillement sur les fréquences propres.

Cependant, lorsque la vibration d'une structure n'est pas entretenue, son amplitude décroît plus ou moins rapidement en raison de divers frottements.

Dans le cas de la poutre flottante, les seuls étant à considérer sont les frottements intérieurs. On fait l'hypothèse que lorsque une poutre flottante est excitée à une fréquence de résonance, son mouvement correspond à un mouvement propre de ses vibrations naturelles. Un corollaire en est que lorsque l'excitation cesse d'être entretenue, le mouvement se poursuit à la même fréquence si la viscoélasticité du matériau est linéaire.

Dans ce cadre, on caractérise l'amortissement du mouvement propre par le décrément logarithmique, que l'on obtient en recherchant l'enveloppe du mouvement, puis en lui ajustant une exponentielle décroissante.

# LE BOIS
# MATERIAU DYNAMIQUE

# INTRODUCTION

Globalement, on peut sans doute présenter le bois comme *une matière première renouvelable* en considèrant qu'il est produit par des organismes vivants (sauf si l'on s'inquiète de l'avenir de la couverture forestière de la planète, ce qui n'est pas interdit), suivant un mécanisme macroscopiquement identique d'une espèce à l'autre.

Ceci dit, à qualité égale, Epicéa et Merisier, Teck et Ebène ne se renouvellent pas au même rythme. Sur cet aspect au moins, il y a donc lieu de distinguer matière première renouvelable et matériau.

La notion de bois-matériau est liée à l'utilisation faite par l'homme du bois-matière première. En général il s'agit du xylème de la tige d'un arbre forestier.

L'homme, depuis quelque temps se préoccupe d'ailleurs de demander aux arbres de fabriquer un matériau approprié à ses inventions (l'exemple des chênes de Colbert est volontiers rappelé aux étudiants en sciences forestières). Ainsi les sylviculteurs se sont-ils penchés sur le problème de la rectitude des troncs et de la vitesse de croissance, voire sur d'autres propriétés comme la densité du bois, suivant les évolutions de l'offre et de la demande de certaines essences.

Cependant, même si certains individus ou espèces sont plus complaisants aux mobiles humains que d'autres, le tronc d'un arbre est avant tout le support indispensable du capteur d'énergie solaire qu'est la masse foliaire.

L'accession au rayonnement solaire lui permet de fabriquer davantage de métabolites par photosynthèse, ce qui revient à fixer notamment du carbone et ainsi à augmenter corrélativement la surface de captation et le volume de la tige - support. Le tronc est en outre un réservoir de composants (dans les cellules du *parenchyme*) et d'eau.

C'est sans doute pourquoi, pour la plupart, les arbres forestiers ont un tronc à peu près cylindrique, c'est-à-dire qu'ils ont eu une croissance radiale uniforme. En principe cependant, tous les troncs sont coniques, ce qui peut poser des problèmes aux transformateurs, mais lorsqu'on observe un petit échantillon, il est d'usage de négliger cette conicité, on parle alors de *bois de droit fil*.

Le tronc d'un arbre est souvent surdimensionné par rapport aux charges statiques qui lui sont appliquées. On peut considérer de prime abord que la régulation de sa croissance est sommaire, mais il faut admettre qu'il doit également résister à divers aléas climatiques (vent, neige, sécheresse).

L'étude des propriétés mécaniques du matériau bois est en principe réservée aux bois susceptibles d'être *mis en oeuvre avec conservation de leur cohésion suivant au moins deux directions*. Il y a peu de rapport entre les propriétés du bois massif et les produits manufacturés à partir de copeaux.

Le bois-matériau, qui avant transformation est un solide tridimensionnel cohérent, peut donc être utilisé tel quel (tronçonné, scié, fendu) ou être transformé en feuilles (placages tranchés ou déroulés) puis par reconstitution, donner naissance à des produits de formes variées.

Les performances mécaniques d'un matériau s'évaluent en mesurant la réponse d'un échantillon à une sollicitation connue.

Les premières limites d'un essai de qualification concernent l'anisotropie et les conditions thermodynamiques auxquelles est soumis l'échantillon au moment où il subit la sollicitation. Le plus souvent on suppose cependant que l'échantillon est "bien orienté" et en équilibre avec son environnement.

Dans le cas du bois, on peut distinguer deux grandes familles d'essais, suivant que la sollicitation occasionne un effet permanent (déformation plastique, endommagement, rupture) ou un effet recouvrable viscoélastique.

Lorsque les sollicitations entrent dans le cadre des petites perturbations d'un système par rapport à un état naturel, on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'effet permanent dans le matériau.

Dans ce cadre, si la réponse à la sollicitation est biunivoque, le comportement est dit élastique, par contre, si la réponse dépend du temps (ou de l'histoire de la sollicitation), le comportement est dit viscoélastique.

On a donc une limite temporelle du domaine d'application d'un essai mécanique, qui apparaît implicitement dans les procédures habituelles sous la forme d'une spécification sur la régulation du chargement quasi-statique.

La caractérisation du matériau par les méthodes vibratoires doit tenir compte de cette limite, car le comportement élastique qui suppose d'une part que le comportement est indépendant de la fréquence ne permet évidemment pas d'expliquer l'amortissement des vibrations dans une structure isolée.

# I - LE BOIS MATERIAU

C'est du tronc des arbres, lequel remplit le rôle de support mécanique de la masse foliaire et des branches, que l'on tire le matériau le plus "noble" (*bois commercial*), mais on peut également appeler "bois" le matériau qui constitue les racines ou les branches (Venet [74]).

Dans la masse foliaire ont lieu des réactions photosynthétiques dont les produits circulent par le *phloème* et alimentent la multiplication des cellules du *cambium*, ce qui se traduit par une accumulation de *xylème* (côté intérieur), c'est-à-dire par la croissance radiale de la tige.

A l'échelle microscopique, le bois a une structure cellulaire. En commun à toutes les espèces d'arbres, il y a un nombre limité de types de cellules dont les parois sont constituées principalement de *polymères organiques.*

L'échelle macroscopique est celle à laquelle le matériau peut être considéré comme continu, cette échelle peut être différente de l'échelle d'homogénéité, notamment lorsqu'on distingue bois de printemps et bois d'été pour les bois de nos régions tempérées.

## I.1 Constituants de base

Le bois est le résultat de la croissance secondaire de la tige, en principe aérienne, du végétal à partir de l'assise cambiale. En majorité, les cellules qui le constituent ont perdu leur noyau cytoplasmique quelques semaines seulement après la division cellulaire qui leur a donné naissance.

Les vides cellulaires sont alors remplis d'eau ou de sève brute tant que l'arbre est vivant. Après la mort de l'arbre ou la mise en oeuvre du bois, la porosité qui permet la circulation de cette eau "libre" autorise, sauf dans le cas (exceptionnel) de la cémentation, son évaporation.

Les macropolymères organiques assurant la pérennité des parois cellulaires sont classés en deux grandes catégories : les *polysaccharides* (cellulose, hemicellulose) et les *lignines*, de complexité très variable. Il est généralement admis que les polysaccharides "prennent place" avant les lignines, ce qui conduit à attribuer à ces dernières la fonction de "matrice".

Les monomères correspondants sont peu nombreux (glucose pour la cellulose, alcools coumarylique, coniferylique et sinapylique pour les lignines).

Autour de ces macropolymères on peut trouver une grande diversité de composants organiques ou minéraux, que les chimistes classent respectivement en *extraits* et *cendres* et qui peuvent représenter des fractions massiques très variables suivant les essences.

L'eau est un composant de première importance des parois cellulaires.

Dans les parois, on distingue l'eau de constitution de l'eau faiblement liée aux autres constituants et notamment aux lignines. La fraction de cette *eau liée* est quantifiée par une grandeur appelée *taux d'humidité*, qui est le rapport de la perte de masse provoquée par un séjour en étuve ventilée à la température de 103 ± 2 °C, à la masse résiduelle.

Dans le bois saturé, c'est-à-dire lorsque les vides cellulaires sont eux-mêmes remplis d'eau libre, l'eau représente environ un quart de la masse des parois (l'expression "point de saturation des fibres" désigne un taux d'humidité de l'ordre de 30%).

Après l'évaporation de l'eau libre, un équilibre se crée entre l'eau en phase gazeuse et l'eau liée, partout où la surface intérieure des cellules est perméable. Dans le bois qualifié de *sec à l'air*, les parois contiennent toujours environ la moitié de la quantité d'eau liée s'y trouvant initialement.

**I.2 Variabilité structurelle**

Lorsqu'on va de l'assise cambiale vers la moelle, on rencontre des cellules de plus en plus âgées. Dans de nombreux cas, il existe une limite assez nette en deça de laquelle on désigne le xylème par le terme d'*aubier* et au delà de laquelle on trouve le *duramen* ou *bois duraminisé*.

Les différences de teintes et donc de composition chimique, mais aussi de teneur en eau permettent de repérer le passage de cette limite. Quoique ni l'aubier ni le duramen ne soient en tant que tels des défauts du xylème, l'expression "*bois sans défaut*" désigne en principe un bois qui n'est pas un mélange des deux. La principale raison en est que l'aubier, qui contient davantage de réserves en constituants métaboliques, a une durabilité naturelle plus faible que le duramen.

Le bois qui se trouve à proximité de la moelle, est appelé *bois juvénile*, comme il n'est pas toujours aisément discernable du bois normal (ou *adulte*), sa présence est admise conventionnellement.

A une hauteur donnée, le bois juvénile correspond à la période faste au cours de laquelle le capteur solaire s'étale avec vigueur, ce qui nécessite d'étayer la tige-support. C'est pourquoi le bois juvénile se retrouve de bas en haut de la tige, dans un volume qui représente un nombre variable (entre une dizaine et une quinzaine) d'années d'accroissement.

Au cours d'une année d'accroissement, on distingue au moins dans la plupart des zones tempérées, deux périodes de végétation : activité et dormance.

Dans la structure du bois on peut alors discerner des limites nettes appelées *cernes* que l'on associe au réveil de la végétation.

Un moyen de caractérisation de ces limites est de mesurer les variations, le long d'un rayon, de la masse volumique, celle-ci étant plus élevée juste avant la période de dormance que juste après.

Cette hétérogénéité ne devient gênante que si les arbres croissent très vite et que les variations de masse volumique ont une grande amplitude.

Dans le cas des bois issus de la forêt sempervirente équatoriale, on ne peut pas toujours distinguer les cernes d'accroissement. l'échelle d'hétérogénéité est alors plus petite, elle correspond à la notion de *grain* (échelle de continuité).

## I.3 Les invariants de la structure

La similitude entre essences des types de cellules constituant le matériau a déjà été soulignée, une similitude encore plus grande peut être observée à l'échelle des couches qui constituent les parois cellulaires.

D'autre part, on accorde au comportement macroscopique du matériau certaines propriétés de symétrie qui découlent de l'organisation particulière du tissu cellulaire.

### I.3.1 *Les parois cellulaires*

a) En ce qui concerne les matériaux de base, les différentes cellules se distinguent par les proportions des constituants pariétaux, la rigidité étant assurée par les chaines de cellulose cristalline (fibrilles).

Les parois cellulaires sont formées de plusieurs couches qui diffèrent surtout par l'arrangement de leurs principaux constituants structuraux. Cependant, on qualifie parfois le bois de *composite* en raison de l'apparente rationalité de ces arrangements.

La couche secondaire *S*, représente en général la fraction massique la plus importante des parois. Au microscope électronique, on peut y distinguer plusieurs sous-couches ; on en dénombre généralement deux (*S1* et *S2*) dans les trachéides, les fibres et les vaisseaux et une troisième (*S3*) dans les cellules de parenchyme (bien que dans ces dernières la couche S soit plus mince que dans les autres cellules, Fengel [15]).

b) La masse volumique des parois est quasiment uniforme (se situant entre 1400 et 1500 $kg/m^3$), la masse d'un volume contenant un grand nombre de cellules est donc liée à sa porosité (volume des vides rapporté au volume total) et à son taux d'humidité.

Pour tenir compte de cette caractéristique, on introduit la notion de *performances spécifiques*. Ce que nous appelerons performance spécifique (d'un échantillon) est la valeur établie expérimentalement d'une performance, divisée par la masse volumique de l'échantillon au moment de l'essai (certains préfèrent rapporter la valeur brute à la densité basale, l'inconvénient de cette définition alternative est que la densité basale exige la dessication intégrale de l'échantillon pour être déterminée).

c) Lorsqu'un échantillon est placé dans un environnement stable en température et en humidité relative de l'air, une partie de l'eau faiblement liée aux molécules organiques des parois est arrachée et un équilibre est atteint au bout d'un temps plus ou moins long suivant la perméabilité du bois.

Le départ d'eau des parois s'accompagne de modifications dimensionnelles qui, à l'échelle macroscopique, se traduisent par le phénomène de *retrait*.

Le bois lorsqu'il est mis en oeuvre, est presque toujours dans un état hygroscopique tel qu'un retrait s'est produit (*retrait initial*). Bien qu'il y ait un phénomène inverse, appelé *gonflement*, se produisant en cas de reprise d'humidité, le retrait initial n'est pas à proprement parler un phénomène recouvrable.

Un séchage soigneusement contrôlé doit permettre d'obtenir un bois exempt de contraintes internes lorsque le taux d'humidité est réparti de façon uniforme dans le volume considéré.

On considère en outre, que dans le bois sans défaut utilisé pour les essais de laboratoire, le séchage a été conduit de manière à éviter tout endommagement de l'ultrastructure (microfissure dans et entre les couches des parois).

Enfin, on admet que le retrait initial respecte les symétries que possède le tissu cellulaire lorsqu'il est extrait de l'arbre, c'est-à-dire lorsque les parois sont "saturées".

### I.3.2 *L'anisotropie organisée du tissu cellulaire*

L'utilisation du bois à des fins non-énergétiques a de tous temps, été liée à l'existence d'une direction privilégiée correspondant au *fil du bois* : la *direction longitudinale* **L** (ex. manches d'outils).

La raison en est limpide puisque le matériau se présente initialement sous la forme d'un solide colonnaire dont la plus grande dimension est celle du fil (que l'on matérialise d'ailleurs facilement sur une pièce de bois).

Les usages plus élaborés ont mis en lumière les différences entre les performances des bois suivant que l'on considère la direction longitudinale ou une direction perpendiculaire au fil du bois. La colonne devant soutenir un capteur solaire se doit d'être particulièrement rigide et résistante aux différentes sollicitations imposées par la nature (flexion).

Perpendiculairement au fil du bois, par idéalisation, on distingue la *direction radiale* **R** et la *direction tangentielle* **T**, que l'on suppose localement perpendiculaires entre elles.

Ces appellations tiennent de la concentricité des accroissements.

La concentricité est due de la croissance radiale de la tige, cette croissance est souvent irrégulière au cours du temps mais, sauf incident, elle est équirépartie (par incidents on peut entendre par exemple "branchaison" ou "inclinaison de la tige").

La direction radiale est la normale aux accroissements (que l'on peut matérialiser d'ailleurs par l'alignement de certaines cellules du parenchyme appelées pour cette raison *rayons*). La direction tangentielle complète le repère orthogonal local.

Lorsque dans une pièce de bois, la courbure des accroissements est faible, on est souvent amené à confondre l'arc et la corde, ce qui permet de repérer la position d'un point dans un unique référentiel **R,T,L**.

L'usage en anatomie des bois est de décrire l'apparence d'un spécimen, à faible grossissement, lorsqu'on l'observe suivant chacune des directions privilégiées du tissu cellulaire. Les trois plans d'observation (*transversal* **RT**, *radial* **RL** et *tangentiel* **TL**) apportent des informations complémentaires ; le tout étant appelé *plan ligneux* (Venet [74]).

## II PARTICULARITES DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DU BOIS

Pour décrire le comportement du bois, on admet qu'il existe une topologie de l'espace matériel sur laquelle s'appuie la notion de continuité, tout en respectant les invariants de l'ultrastructure.

Cela permet de définir, en chaque point d'un volume donné, aussi petit soit-il, les grandeurs scalaires ou tensorielles habituelles en mécanique des milieux continus.

En chaque point, on suppose qu'il existe un repère orthogonal correspondant aux orientations privilégiées des cellules. Dans ce repère, le matériau a deux plans de symétrie, le plan transversal RT (on néglige la conicité) et le plan radial RL.

En ce qui concerne le comportement, ne craignons pas d'être démenti en affirmant (même si c'est simpliste) que les microfibrilles de cellulose cristalline rigidifient les parois alors que les autres macromolécules en assurent la cohésion. La composition polymérique particulière du bois en fait un matériau viscoélastique (Le Govic [33]), tant que cette cohésion n'est pas menacée.

### II.1 Les fonctions d'état

Au cours de l'étude du comportement du bois, on pourra être amené à définir l'état d'un point donné par sa température et son taux d'humidité.

La masse volumique du matériau est un paramètre primordial de la dynamique des structures élastiques. Elle fournit également un bon paramètre explicatif de la variance interspécifique des propriétés élastiques (Guitard [22]).

Le taux d'humidité, ainsi que la masse volumique ont, normalement, des définitions qui s'appliquent à l'échelle macroscopique ; on supposera ces définitions transposables à l'échelle de continuité.

#### II.1.1 *Le taux d'humidité*

a) Le taux d'humidité, en un point, égale par définition le rapport de la masse d'eau (libre ou liée) à la masse des autres constituants, dans un voisinage du point considéré. Lorsqu'une pièce de bois est placée suffisamment longtemps dans une atmosphère de caractéristiques hygrothermiques constantes, la quantité totale d'eau qu'elle contient se stabilise (les normes indiquent que l'équilibre est atteint lorsqu'on observe que la masse totale ne varie pas au cours d'une période de 24 heures).

Il peut arriver cependant que le taux d'humidité ne soit pas uniformément réparti, en raison notamment de la lenteur de la diffusion suivant les directions perpendiculaires au fil (le risque est que la variation de la masse totale soit imperceptible sur la durée d'observation).

b) L'influence de la teneur en eau sur le comportement viscoélastique des parois cellulaires, donne à cette fonction une importance considérable et il convient toujours de s'assurer de la parfaite stabilisation des échantillons destinés aux essais de qualification.

En effet l'équilibre hygrothermique (i.e. la stabilisation) est plus important que le taux d'humidité lui-même.

Le taux d'humidité, même s'il est uniformément réparti, est un paramètre très imprécis car, étant défini en rapport à la masse de constituants dont certains ne sont pas hydrophiles (commme les cendres, certains extraits et la cellulose cristalline), il peut différer notablement suivant les bois.

### II.1.2 *La température*

La température n'est mentionnée ici que pour mémoire, car tous les essais que nous avons réalisé ont eu lieu à température ambiante.

a) La température a un effet certain sur la cinétique des transferts de masse.

- On sait qu'à condition de maîtriser l'humidité relative de l'air, on peut accélérer le séchage ou l'humidification d'une pièce de bois (cela concerne également l'uniformisation du taux d'humidité au sein de la pièce).

- Une élévation de température peut d'autre part entraîner des modifications irréversibles de la composition chimique du bois, en favorisant la volatilisation (bois sec) ou la dissolution dans l'eau libre (bois vert) de certains composés (entraînant parfois des changements de coloration).

b) Les effets d'une élévation de température sur les propriétés mécaniques du bois s'expliquent par sa composition polymérique :

- La cohésion du matériau est assurée par des liaisons intermoléculaires faibles (forces de Van der Waals) et l'agitation thermique augmente sa déformabilité (Ferry [16]): on peut selon toute vraisemblance, appliquer au bois le principe de l'équivalence temps-température (Le Govic et al. [32]).

- Cependant, les parois des cellules sont des assemblages de macromolécules dont les comportements individuels sont très différents. Le bois n'est pas un corps *thermorhéologiquement simple*, mais il semble, d'après de récentes études, que le spectre des températures de transition, peut être considéré comme discret (Huet [25], Genevaux [17]).

### II.1.3 *La masse volumique*

Le bois est un milieu poreux. La masse volumique, définie comme le rapport d'une masse au volume qui la contient, est assimilée à une fonction continue du point matériel. Le concept d'homogénéité du bois est donc également assorti de la notion d'échelle, c'est pourquoi, bien que la masse volumique ne soit pas une fonction d'état au sens thermodynamique du terme, il en est question ici.

Dans le repère local lié à l'ultrastructure, lorsque le taux d'humidité est invariant, on suppose que la masse volumique ne varie pas dans un plan tangentiel en raison des symétries du tissu cellulaire, par contre, elle est susceptible de varier suivant la direction radiale (alternances de bois "tendre" et de bois "dur").

Nous avons déjà souligné que les variations de taux d'humidité s'accompagnent de modifications dimensionnelles appelées, en termes relatifs et à l'échelle macroscopique, retrait ou gonflement. Ces "déformations", quoique pouvant être de grande amplitude, sont plus faibles que les variations relatives de masse qui les accompagnent, ce qui explique pourquoi la masse volumique du bois dépend de son état d'équilibre hygrométrique.

## II.2 Les tenseurs d'état

L'état de contrainte en chaque point, peut être représenté par un tenseur symétrique du second ordre. C'est la transformation qui associe au vecteur unitaire normal à une facette au point considéré, la contrainte qui s'exerce sur la facette.

En général, on l'écrit en se fixant un repère lié à la configuration actuelle du système, sous la forme d'une matrice carrée symétrique (tenseur de Cauchy).

Lorsqu'on suppose qu'il existe une configuration de référence exempte de contraintes internes (état naturel), on représente également l'état de déformation par un tenseur symétrique du second ordre (tenseur de Green-Lagrange).

Ces deux tenseurs sont des grandeurs objectives (i.e. indépendantes du référentiel dans lequel on observe le mouvement, Germain [18]).

Dans le cadre de l'*hypothèse des petites perturbations*, on utilise une description lagrangienne pour les deux tenseurs d'état (i.e. on admet que le tenseur de Cauchy a la même expression dans un repère lié à la configuration dans son état naturel).

Cette hypothèse permet donc de limiter le choix du repère au type de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, ...) les plus adaptées à la description du système et de son mouvement.

## II.3 Le comportement linéaire et orthotrope cylindrique

a) Le comportement d'un matériau peut, en principe, toujours être décrit par une fonctionnelle qui permet de passer de l'histoire d'un des tenseurs d'état à la valeur présente de l'autre (Mandel [37]).

Lorsque cette fonctionnelle est linéaire, on peut appliquer le principe de superposition des effets lorsqu'on connait les causes et vice versa.

Cette condition limite le comportement au cadre de la viscoélasticité ou, lorsque dans la fonctionnelle n'intervient, en fait d'histoire, que la valeur présente du tenseur de départ, au cadre de l'élasticité.

L'*hypothèse des petites perturbations* permet de linéariser le tenseur des déformations en négligeant les termes du second ordre (couplages), ainsi que la fonctionnelle du comportement.

Cette fonctionnelle linéarisée, qui dans le cas général, doit être traitée comme un tenseur d'ordre quatre, bénéficie des symétries du matériau et de la régularité supposée des problèmes.

**b)** *Notations matricielles*

Un repère étant choisi, soient $\epsilon_{ij}$ les composantes du tenseur linéarisé de déformation et $\sigma_{kl}$ celles du tenseur de Cauchy. Ces tenseurs étant symétriques ils sont parfaitement définis par 6 de leurs composantes (par exemple celles pour lesquelles $i \geq j$ et $k \geq l$ respectivement).

Avec la convention de sommation pour les indices répétés, on peut alors écrire la loi de comportement sous la forme de 6 produits de convolution :

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} S_{ijkl}(t-\tau) \cdot \frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau$$

Dans le cas général, les 36 fonctions réelles d'une variable réelle qui interviennent dans ces relations (appelées *complaisances viscoélastiques*, Schniewind [57]), ne sont pas des grandeurs objectives.

Si le repère dans lequel on se place coïncide avec les directions privilégiées du tissu cellulaire, le nombre de complaisances viscoélastiques non nulles est réduit à 12, en raison des symétries admises par rapport aux plans RL et RT (la démonstration est la même qu'en élasticité) :

$$S_{ijkl}(t) = \begin{bmatrix} S_{1111}(t) & S_{1122}(t) & S_{1133}(t) & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211}(t) & S_{2222}(t) & S_{2233}(t) & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311}(t) & S_{3322}(t) & S_{3333}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1313}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212}(t) \end{bmatrix}$$

Remarques :

- Lorsque le comportement est *élastique*, les complaisances sont de simples constantes réelles.
  Comme on suppose qu'il existe une configuration de référence exempte de contraintes, le produit de convolution devient :

  $$\epsilon_{ij}(t) = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}(t)$$

  Dans un matériau orthotrope, 9 complaisances suffisent à définir le tenseur du comportement élastique (car $S_{ijkl} = S_{klij}$).

- On peut également décrire le comportement linéaire par la transformation inverse, au moyen de la matrice des *rigidités* viscoélastiques $C_{ijkl}$. Celle-ci, dans le repère RTL, s'écrit de la même façon que la matrice des $S_{ijkl}$, les $C_{ijkl}$ pouvant être des fonctions généralisées (principe de non-dualité, Mandel [37]).

## III ETUDE EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT ACOUSTIQUE

Les essais dynamiques se caractérisent par la prise en compte des forces d'inertie dans les relations qui servent à l'interprétation des observations.

En général, les mouvements sont de faible amplitude, en raison des limitations en puissance des moyens expérimentaux. On suppose donc être dans le cadre des petites perturbations et de la linéarité du comportement.

Le grand intérêt présenté par ce type d'essais, est qu'ils sont non-traumatisants, c'est-à-dire que l'éprouvette peut revenir dans son état initial au bout d'un temps plus ou moins long après la fin d'un essai. La même éprouvette peut donc faire l'objet de plusieurs expérimentations successives, ce qui mérite d'être souligné dans notre contexte (le seul "défaut" du bois n'est-il pas son extrême variabilité ?).

*Nous limitons volontairement cet exposé aux méthodes expérimentales qui permettent de déterminer les grandeurs suivantes :*

- *les fréquences propres d'une structure*, parce qu'elles dépendent des propriétés mécaniques des matériaux constitutifs de la structure, ces fréquence sont habituellement *moyennes* (quelques DaHz à 20KHz).

- *le coefficient de frottement intérieur*, car il informe sur la rapidité avec laquelle une vibration s'amortit et sur le comportement viscoélastique des matériaux. Il quantifie la fraction de l'énergie de vibration qui se dissipe en chaleur, au cours de chaque période.

La plage des fréquences dans laquelle les sollicitations sont produites dans le bois, correspond ici aux fréquences audibles. Pour l'étude de la réponse du système, on fait donc appel à des outils (mathématiques et instrumentaux) développés par ou pour les acousticiens.

Outre la caractérisation mécanique des matériaux, ces sollicitations dynamiques permettent donc de quantifier le comportement acoustique, c'est un moyen d'investigation très utilisé par les chercheurs japonais en relation avec des facteurs d'instrument de musique.

Toutefois, le caractère non-traumatisant qui permet de les qualifier d'essais non-destructifs, en fait des moyens d'investigation ayant un champ d'application très large, qui n'est certainement pas limité au bois ou aux matériaux composites à base de bois (Sobue & Iwasaki [60], Moore & Kline [39]), comme en témoigne une abondante littérature (Vinh et al. [76]) et un certain nombre de procédures normalisées, note B&K [44]).

Les structures que nous considérons dans cet exposé sont des poutres. Parmi les conditions aux frontières envisageables, les plus fréquemment rencontrées dans les essais de qualification sont soit celles d'une poutre "libre-libre", soit celles d'une poutre "encastrée-libre".

La dénomination libre-libre pour une poutre, indique qu'aucun effort n'est exercé aux extrémités, la poutre est alors nécessairement supportée en un point de sa frontière. Lorsque l'effet des réactions d'appui peut être négligé, convenons d'utiliser l'expression *poutre flottante*.

### III.1 Les fréquences propres d'une structure

Les fréquences propres d'une structure dépendent de sa configuration géométrique, des conditions imposées à ses frontières et des propriétés du (ou des) matériau(x) constitutif(s). Suivant que l'on étudie les vibrations naturelles ou les vibrations forcées par une excitation périodique entretenue, les fréquences propres se manifestent de façons différentes.

**a)** Dans le cas des *vibrations naturelles*, les fréquences propres correspondent à des mouvements particuliers qui vérifient les conditions aux frontières du système, en l'absence d'efforts extérieurs.

Si le mouvement peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants, on peut montrer que toute vibration naturelle peut être décomposée en une combinaison linéaire des mouvements propres, ceux-ci étant dénombrables. C'est le cas lorsque les matériaux ont un comportement élastique ou viscoélastique linéaire (il y a correspondance par la transformation de Carson entre ces deux comportements).

Il en découle que l'analyse spectrale d'un mouvement naturel offre le moyen de déterminer simultanément plusieurs fréquences propres d'une structure donnée.

Il est assez facile de générer un mouvement naturel, par exemple en appliquant une percussion à la structure. L'*allure* du spectre reflète cependant la répartition de l'énergie mécanique suivant les différents mouvements propres, or les écarts entre fréquences propres de ces mouvements pouvant être élevés, il est souvent difficile d'avoir une équirépartition de l'énergie de vibration sur un grand nombre de modes.

**b)** Si les matériaux sont viscoélastiques, l'amplitude des vibrations naturelles décroît en raison de la dissipation d'énergie par frottements intérieurs. La durée des vibrations peut alors être très brève.

Cependant, lorsqu'on exerce une excitation sinusoïdale modulée en fréquence, on admet que les fréquences propres correspondent aux fréquences de résonance de la structure. La méthode de détermination par vibrations forcées est d'ailleurs très ancienne et reste la plus fréquemment employée, même dans le cas du bois.

Pour transmettre l'excitation à la poutre, se pose toutefois le problème des contacts. Dans le cas d'une poutre encastrée-libre, on procède généralement en solidarisant l'encastrement à un pot vibrant (Vafai [73], Le Nizerhy et al. [35]), mais on peut également imposer un effort tranchant à l'extrémité libre (Tang & Hsu [67]). Si l'on excite une poutre libre-libre en la solidarisant à un pot vibrant en son milieu, on n'obtient que les modes de rang impairs.

Deux méthodes permettent d'exciter une poutre libre-libre sans contact direct, la première qui utilise les variations de pression au voisinage d'une source sonore (Grüneisen [21]), est peu discrète (Guitard, communication personnelle). On préfère donc fixer à l'éprouvette un élément métallique de petite taille, sur lequel on agit au moyen d'un électro-aimant (Hearmon [23], Kamioka & Kataoka [27], Kataoka & Ono [28], Kollmann & Krech [30], Le Nizehy [34], Norme soviétique [39]).

### III.2 L'amortissement des vibrations

Le coefficient de frottement intérieur est, par définition, le rapport de l'énergie dissipée au cours d'un cycle à l'énergie que possède le système du fait de son mouvement. Ce coefficient caractérise donc la cinétique de l'amortissement des vibrations.

Dans le cas des essais dynamiques, trois méthodes peuvent être envisagées, qui permettent de quantifier cette cinétique.

a) L'étude de l'aire de la courbe contraintes-déformations est la méthode la plus conforme à la définition, mais pratiquement se pose le problème de l'enregistrement de la courbe caractéristique et de la mesure de son aire. On la réserve aux basses fréquences (essais cycliques) où son interprétation est d'autant plus aisée que l'on peut négliger les forces d'inertie.

Signalons cependant que l'étude de la courbe contrainte-déformation à basses fréquences (comprises entre $10^{-3}$ et 1 Hz), offre diverses possibilités de compléter la seule détermination du coefficient de frottement intérieur, par d'autres caractéristiques du comportement viscoélastique, comme par exemple la limite de linéarité de ce comportement (Okuyama et al. [45], Marsoem et al. [38], Bordonné et al. [7])

Les deux autres méthodes sont beaucoup plus fréquemment employées dans la gamme des moyennes fréquences.

b) L'étude de la courbe de réponse (amplitude vs fréquence) de la structure en vibrations forcées au voisinage d'une résonance, permet de mesurer le *facteur de perte*, qui est le rapport de la largeur de bande du pic de résonance (conventionnellement prise à -3dB du maximum atteint), à la fréquence de résonance.

Pour appliquer cette méthode, il faut en principe asservir l'amplitude de l'excitation, de manière à rendre l'énergie fournie au système indépendante de la fréquence de l'excitation. A cette précaution près, on opère comme en III.1.b), en faisant varier lentement la fréquence au voisinage d'une fréquence propre et en enregistrant l'amplitude du mouvement d'un point de la structure.

Le dépouillement des résultats obtenus par cette méthode, se fait sans trop de difficulté pour les structures de type oscillateur, c'est-à-dire composées de deux matériaux dont l'un est considéré comme indéformable (dont on observe le mouvement) et tels que la masse du matériau viscoélastique soit négligeable devant la masse totale.

c) Dans le cas des milieux continus, on utilise également l'étude de l'amortissement d'un mouvement propre en vibrations naturelles. La grandeur que l'on détermine par cette méthode est le *décrément logarithmique*, c'est-à-dire la diminution relative d'amplitude du mouvement sinusoïdal d'un point, pendant une période du mouvement.

Au moyen d'un effort sinusoïdal (d'amplitude quelconque) on établit la résonance du système. Après l'arrêt de l'excitation, la structure ayant acquis un mouvement propre, le conserve aux frottements intérieurs près.

En régime permanent, contrainte et déformation sont en tout point des fonctions sinusoïdales du temps. On admet que le déphasage entre ces grandeurs est constant bien que la phase de l'une ou l'autre puisse dépendre du point considéré (le mouvement n'est pas stationnaire, Persoz [51]).

Lorsqu'on interrompt l'excitation, la vibration devient "naturelle" et dans le cas de matériaux à comportement viscoélastique linéaire, son amplitude est exponentiellement amortie.

### III.3 Exemples d'applications

L'utilisation des vibrations pour caractériser les propriétés du bois est peu usitée en France (Douau [14]), à la différence des mesures ultrasonores (Préziosa et al. [53], Bucur [8], Launay et al. [31]). Pourtant, les phénomènes en jeu sont de nature proche et ces deux types de méthodes d'analyse ont été validées pour les matériaux composites anisotropes (Vinh [75], Vinh et al. [76], Le Nizerhy [34]).

#### III.3.1 *En facture d'instruments : le bois de résonance*

*On peut trouver un nombre considérable d'essences différentes dans les instruments de musique. De toutes ces essences, certaines sont sélectionnées pour leurs qualités esthétiques, certaines pour leur stabilité hygrothermique (insensibilité aux variations thermodynamiques de leur environnement), certaines enfin pour leurs qualités acoustiques.*

*La plupart des études de laboratoire faisant appel aux sollicitations dynamiques concernent les tables d'harmonie.* Dans un instrument à corde, la table d'harmonie est la partie qui, mise en vibration, transmet les ondes à l'environnement. Ces pièces sont réalisées à partir de planches découpées sur quartier, leurs plus grandes dimensions correspondent donc aux directions longitudinale et radiale du bois, ce qui lui confère une plus grande homogénéité de comportement en flexion (Douau [14], McIntyre & Woodhouse [36], Ono & Norimoto [48,49], Tonosaki et al. [70]).

Elles sont le plus souvent faites en bois d'épicéa (Picea excelsa ou P. sitchensis), si possible à cernes fins, c'est-à-dire ayant eu une croissance lente. Le haut de gamme en lutherie est parfois surnommé *épicéa coudrier* (Douau [14]), mais n'est pas considéré comme une sous-espèce (de P. excelsa). On le trouve dans certaines forêts de montagne en Europe occidentale, mais sa réputation a fait le tour du monde (i.e. le bois nous revient à l'intérieur des pianos de concert construits au Japon par Yamaha).

Deux chercheurs japonais ont particulièrement étudié les propriétés acoustiques du bois de résonance, en comparant généralement l'épicéa, à d'autres essences "substituables" (M. Norimoto au sein du Wood Research Institute de l'Université de Kyoto et T. Ono de la Faculty of Engineering de l'Université de Gifu [29,41,47,48,49]). Malgré l'inévitable variabilité du bois à l'intérieur même des tables d'harmonie (Ono [47]), il est apparu un critère physique de sélection pour les bois de résonance. D'après ces auteurs, qui ont utilisés des échantillons sélectionnés par un facteur de piano, les meilleurs bois de résonance sont ceux qui bénéficient d'un faible coefficient de frottement intérieur (i.e. facteur de perte, i.e. décrément logarithmique), associé à un module spécifique élevé.

Ces deux grandeurs étant favorablement (et fortement) corrélées, ils proposent de baser la sélection sur les valeurs élevées du module dynamique spécifique, c'est-à-dire le rapport du module d'élasticité dynamique à la masse volumique.

III.3.2 *dans l'étude des relations structure - comportement*

Les vibrations sont toujours mises en oeuvre dans de nombreux laboratoires pour la mesure des complaisances viscoélastiques en suivant les différentes orientations de l'anisotropie de la structure du bois (Ishihara et al. [26], Ono & Norimoto [50], Poliszko [52], Sobue & Takemura [59], Tonosaki et al. [70], Yano & Yamada [78]).

En effet, il est possible d'utiliser des échantillons de petite taille, ce qui est d'un intérêt notable pour les essais perpendiculaires au fil du bois, en raison des difficultés de réalisation d'échantillons bien orientés.

Un autre problème se trouvant résolu est celui de respecter l'hypothèse des petites perturbations, les efforts mis en jeu ne sauraient être que très dépendants de la direction ce qui, pour les chargements statiques perpendiculaires au fil, oblige à faire appel à des dispositifs de grande précision.

On peut également les mettre en oeuvre pour étudier les relations entre le comportement du bois massif et les propriétés, que l'on suppose être différentielles, de ses composants polymériques (Gril [20], Norimoto et al. [42], Rials & Glasser [55], Suzuki [65])

III.3.3 *en rhéologie du bois*

Les essais acoustiques, nous l'avons déjà souligné, permettent de réaliser plusieurs expérimentations (analogues ou non) sur la même éprouvette.

Indépendamment des études sur la variabilité inter- ou intraspécifique du bois, on peut donc les recommander pour les études phénoménologiques du comportement et notamment pour :

- Les études sur l'équivalence temps-température, ou sur l'effet de l'un ou l'autre de ces paramètres sur les modules complexes.

  L'effet de la fréquence sur les modules complexes du bois a été abondamment illustrée ; à la différence de l'effet de la température, pour laquelle les résultats sont plus rares (Poliszko [52], Sellevold et al. [58]).

- Les études sur l'effet de la teneur en eau sur les modules complexes.

  Au dessus du point de saturation des fibres, le comportement dynamique dépend peu du taux d'humidité (i.e. de la quantité d'eau libre). Il en va de même pour des teneurs en eau très faibles, proches de l'état anhydre (taux d'humidité $\leq$ 5% environ).

  Dans le bois sec, la partie réelle des modules complexes (suivant les directions L et R) croît fortement lorsque la teneur en eau diminue, contrairement à leur partie imaginaire (Suzuki [66], Tang & Hsu [67]).

# VIBRATIONS NATURELLES DANS LES POUTRES FLOTTANTES ELASTIQUES

## INTRODUCTION

*Le présent chapitre traite de la décomposition des vibrations naturelles en mouvements propres.* Un mouvement propre est par définition harmonique : le vecteur déplacement de tout point de la poutre, est une fonction sinusoïdale du temps. Le système mécanique constitué par une poutre flottante homogène élastique est suffisamment simple pour que l'existence des pulsations propres puisse être démontrée rigoureusement (Roseau [56]).

L'essentiel de la discussion porte donc sur **les relations entre les fréquences propres et les propriétés mécaniques du matériau.**

*Le matériau est considéré comme homogène* : la description des vibrations par les équations analytiques du mouvement exclut parfois d'éventuelles variations de masse volumique. Ajoutons qu'en principe, tout essai sur du bois suppose que l'éprouvette-échantillon est dans un état hygrométrique déterminé, obtenu par stabilisation dans un environnement contrôlé en température et humidité relative de l'air.

*Les poutres sont bien orientées*, suivant l'une des direction L, R ou T : si tel n'est pas le cas, l'hypothèse d'homogénéité peut être contestable en prenant en considération la direction du mouvement, la largeur des cernes d'accroissements et/ou la texture du bois. En outre, la flexion d'une poutre anisotrope mal orientée est couplée à une torsion, ce qui complique notablement l'interprétation des résultats (Le Nizerhy [34]).

*Les poutres ont une section rectangulaire uniforme* : les fréquences propres de vibrations d'une poutre sont également fonctions de ses caractéristiques géométriques, que l'on supposera donc déterminées ; pratiquement, l'usinage des objets à étudier doit respecter au minimum les tolérances fixées par les Normes Françaises pour le bois, notamment pour les dimensions de la section droite.

Pratiquement, les poutres sont statiquement déterminées au repos : elles reposent sur des appuis élastiques de rigidité très faible, de telle manière que les fréquences de leurs mouvements "de corps solide" (0 ou 1 noeud) soient très faibles par rapport aux fréquences de leurs mouvements "de corps élastique" (2 ou plusieurs noeuds). Les interactions entre les appuis et les vibrations naturelles sont donc négligées (Blay et al. [4]).

On suppose d'autre part les sections telles que leur plus grande dimension est suffisamment petite, par rapport à la longueur, pour pouvoir traiter le problème en utilisant les hypothèses et notations(*) de la théorie des poutres en résistance des matériaux (RdM).

(*) cependant et contrairement aux habitudes, dans tout ce chapitre, la masse volumique est désignée par la lettre $\mu$.

La RdM permet d'approcher l'état du système en reduisant les efforts à des grandeurs intégrales (torseurs) et en limitant la description des mouvements à ceux des points de l'axe de la poutre au repos. Les variations de l'aire et de la forme d'une section droite, dues aux termes non-diagonaux de la matrice des complaisances, sont négligées.

Lorsque les poutres sont isotropes et très élancées, les fréquences propres les plus basses peuvent être valablement exploitées pour caractériser le module d'Young du matériau, au moyen de relations biunivoques, aussi bien en vibrations transversales (I), qu'en vibrations axiales (II).

En ce qui concerne les vibrations transversales, la description des mouvements est améliorée par le modèle de Timoshenko, qui fait intervenir notamment le rapport du module d'Young suivant l'axe de la poutre au module de Coulomb (cisaillement élastique) dans le plan de la poutre correspondant au plan du mouvement (III).

Dans le cas des poutres d'élancement réduit et/ou en matériau anisotrope, les limites d'utilisation des relations biunivoques de la théorie élémentaire, apparaissent très vite par comparaison avec ce modèle.

Deux paramètres du modèle étant a priori inconnus, une approximation permettant de les déterminer par résolution d'un système linéaire est présentée et justifiée (pour un grand nombre de configurations "poutre-matériau").

Il restait à mettre au point un protocole d'essai non-destructif, permettant d'obtenir simultanément les deux modules d'élasticité du matériau de la poutre. Un dispositif expérimental spécifique, basé sur un micro-ordinateur - qui calcule les fréquences propres par analyse spectrale de la réponse d'une poutre flottante à une percussion non-traumatisante, puis met en oeuvre l'approximation mentionnée ci-dessus - est présenté en fin du chapitre (IV).

Compte tenu des incertitudes expérimentales, le module d'Young suivant la direction longitudinale du bois apparaît par cette méthode indépendant de l'élancement de l'éprouvette : la viscoélasticité affecte peu ce module d'Young dans la plage des fréquences acoustiques (V).

Par contre, il n'en va pas forcément de même pour le module de Coulomb : on conviendra donc de réserves sur la valeur calculée (puisque celle-ci est obtenue à partir de plusieurs fréquences propres).

# I. LA THEORIE ELEMENTAIRE POUR LES VIBRATIONS DE FLEXION :

La théorie élémentaire est celle que l'on trouve dans tous les manuels au chapitre "vibrations des poutres élastiques". Elle permet une première approche de la problématique des fréquences propres et de leur interprétation dans un contexte de caractérisation technologique du matériau constitutif de la poutre.

On appellera **module spécifique** du matériau, le rapport de son module d'élasticité dans la direction de l'axe de la poutre, à sa masse volumique au moment de l'essai. Le module spécifique est homogène au carré d'une vitesse (vitesse de phase d'une onde progressive dans un milieu continu élastique non-borné, Dieulesaint & Royer [13]).

## I.1 L'équation de Bernoulli

L'équation du mouvement de la ligne neutre, lorsque l'on néglige les déformations de cisaillement et que l'on considère, pour l'équilibre instantané des efforts, que la masse est concentrée aux points de l'axe de symétrie de la poutre (en l'état de repos), est attribuée à D.Bernoulli (Rayleigh [54]).

On considère une poutre droite parallélépipédique de longueur "l", d'épaisseur "h" et de largeur "b".

La position d'un point est alors définie par rapport à un repère orthonormé $Oxyz$ tel que la poutre représente le volume :

$$\{ \text{ points tq } \; 0 \le x \le l \; ; \; -h/2 \le y \le h/2 \; ; \; -b/2 \le z \le b/2 \; \}$$

On suppose que les sollicitations auxquelles la poutre est soumise sont symétriques par rapport au plan Oxy et qu'il existe une ligne neutre qui en l'état de repos est confondue avec l'axe $Ox$ de symétrie de la poutre.

Le mouvement est décrit par les déplacements $U(x,t)$, $V(x,t)$, $W(x,t) = 0$ des points P, de coordonnées $y = 0 = z$, de la ligne neutre.

On se propose, dans le cas des vibrations de flexion, de décrire les déplacements $V(x,t)$ suivant la direction Oy de ces points, afin de mettre en évidence les relations entre ces déplacements et les lois de comportement du matériau.

Comme en statique, on fait d'autre part l'*hypothèse des tranches* qui revient à poser que toute section droite de la poutre en l'état de repos reste plane au cours du mouvement. Ainsi, la position d'une section peut être représentée par deux paramètres à un instant t : la position de son point d'intersection avec la ligne neutre et l'angle $\Phi$ que fait la normale à la section en ce point par rapport à sa position au repos.

On note $T(x,t)$ l'*effort tranchant* et $M(x,t)$ le *moment fléchissant* en P à l'instant t. En raison du mouvement, il faut faire intervenir les efforts dus à l'inertie : en première approximation on les exprime comme si la masse de la poutre était concentrée sur la ligne neutre.

L'équilibre des efforts appliqués à l'élément de la poutre compris entre les abscisses $x$ et $x + dx$, se résume alors à :

$$T(x + dx) - T(x) = \mu A \frac{\delta^2 V}{\delta t^2} dx = \frac{\delta T}{\delta x} dx$$

et l'équilibre des moments, pour le même élément de poutre :

$$M(x + dx) - M(x) = - T(x)\, dx = \frac{\delta M}{\delta x} dx$$

où $\mu$ **est la masse volumique et A l'aire de la section** de la poutre en x.

L'hypothèse des tranches permet d'exprimer la déformation normale en tout point en fonction du rayon de courbure $R(x,t)$ de la ligne neutre:

soit $$\epsilon_{xx}(x,y,z,t) = - \frac{y}{R(x,t)}$$

La loi du comportement élastique linéaire permet de poser $\epsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E_{xx}$ où $E_{xx}$ est le module d'élasticité du matériau dans la direction $Ox$; comme on suppose que $\sigma_{xx}$ est la seule composante non nulle et que pour l'instant on ne fait pas intervenir le cisaillement, supprimons le double indice "xx" des notations.

On a ainsi : $$\sigma(x,y,z,t) = - \frac{yE}{R(x,t)}$$

Le moment $M(x,t)$ et les contraintes normales $\sigma$ dans la section à l'abscisse x sont liés par :

$$M(x,t) = \iint_A \sigma(x,y,z,t).y.dydz = \frac{EI}{R(x,t)}$$

I est le moment d'inertie de la section droite : $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12}$

La courbure, en supposant ici que les sections droites restent à tout instant normales à la ligne neutre au cours du mouvement, est donnée par :

$$\frac{1}{R(x,t)} = \frac{\delta \Phi}{\delta x} = \frac{\delta^2 V(x,t)}{\delta x^2}$$

On obtient finalement l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\mu A \frac{\delta^2 V}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[ EI \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} \right] = 0}$$

Il est convenu de négliger les forces de réactions des appuis (efforts tranchants dus au poids propre), les conditions aux frontières correspondent alors à l'évanescence du moment et de l'effort tranchant aux extrémités $x = 0$ et $x = l$ de la poutre ( 4 conditions pour une équation du 4ème ordre en x ).

Dans le cas général, la solution V(x,t) dépend en outre d'une infinité dénombrable de conditions temporelles, décrivant par exemple son état initial. Compte tenu de sa régularité supposée, on peut montrer en effet qu'elle peut s'écrire sous la forme d'un développement en série de modes propres.

### I.2 Modes propres de vibration

Par définition d'un mode propre de vibration, la projection de la trajectoire de chaque point suivant la direction Oy est une fonction sinusoïdale du temps, c'est-à-dire :

$$V(x,t) = F(x)\sin(2\pi ft + \phi).$$

Si on met V(x,t) sous cette forme dans l'équation de Bernoulli, on trouve que F(x) doit vérifier :

$$\frac{\delta^4 F}{\delta x^4} = a^4 F \quad , \text{ avec } \quad a^4 = 4\pi^2\mu . \frac{Af^2}{EI}$$

où f est la fréquence de la vibration.

La solution générale s'écrit sous la forme :

$$F(x) = C_1.\cos(ax) + C_2.\mathrm{ch}(ax) + C_3.\sin(ax) + C_4.\mathrm{sh}(ax)$$

Les valeurs possibles de f dépendent des conditions aux limites, que l'on peut écrire dans le cas de notre poutre flottante :

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}(0,t) = 0 = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}(1,t) \quad \Leftrightarrow \quad \text{pas de moment fléchissant exercé aux extrémités}$$

$$\text{et} \quad \frac{\delta^3 V}{\delta x^3}(0,t) = 0 = \frac{\delta^3 V}{\delta x^3}(1,t) \quad \Leftrightarrow \quad \text{pas d'effort tranchant exercé aux extrémités}$$

Ces conditions aux limites conduisent à quatre équations linéaires des quatre constantes $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$. Ce système n'a de solution non triviale que si son déterminant est nul ce qui équivaut (tous calculs faits) à la condition :

$$\mathrm{ch}(a.l).\cos(a.l) = 1$$

Les solutions de cette équation servent en quelque sorte de référence, dans la mesure où les caractéristiques de la poutre et du matériau qui la constitue sont toutes contenues dans le seul terme " a ", lequel est homogène à l'inverse d'une longueur. Pour manipuler des quantités sans dimensions, convenons de changer de notation en introduisant :

$$\boxed{m = a.l}$$

Soit donc l'équation $cos(m).ch(m) = 1$. Cette équation a une infinité dénombrable de racines $m_1$, ..., $m_k$, ... distinctes dont les premières ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} m_1 &= a_1.l = 4.7300 \\ m_2 &= a_2.l = 7.8532 \\ m_3 &= a_3.l = 10.9956 \\ m_4 &= a_4.l = 14.1372 \\ m_5 &= a_5.l = 17.2788 \end{aligned}$$

Les valeurs des racines suivantes sont obtenues avec une précision suffisante en écrivant : $m_k = (2k + 1)\,\pi/2$ ( lorsque m augmente, ch(m) tend vers l'infini, cos(m) tend donc vers 0 ).

Chaque valeur $m_k$ correspond à un mode propre, de fréquence $f_k$ telle que :

$$4\pi^2 f_k^2 = X_k . \frac{E}{\mu} . \frac{I}{Al^4}$$

N.B. Dans cette expression, on a introduit la notation $X_k = m_k^4$, que l'on retrouvera au moment de l'étude critique en III.

I.3 Exploitation : détermination du module dynamique apparent

Pour une poutre flottante, on peut chercher à exploiter les résultats précédents en raisonnant de la manière suivante :

*Si l'on peut identifier la fréquence $f_k$ d'un des modes propres et que l'on connait son rang $k$, on peut en déduire la valeur du module d'élasticité du matériau dans la direction Ox en posant :*

$$E = 4\pi^2 \mu \, l^2 . \frac{Al^2}{I} . \frac{f_k^2}{X_k}$$

Malheureusement, les racines de l'équation de Bernoulli ne résistent pas à l'expérience : lorsqu'on détermine les fréquences associées à plusieurs modes propres d'une même poutre, il s'avère impossible d'en déduire une valeur unique (i.e. indépendante de $k$) du module d'élasticité E en utilisant les coefficients $m_k$ (i.e. $X_k$), tels qu'ils sont tabulés ci-avant.

Dans le cas du bois, qui n'est pas parfaitement élastique, la non-redondance apparente de ces fréquences pourrait avoir pour origine le comportement d'un matériau semblant se rigidifier lorsque la fréquence augmente. C'est pourquoi tout module, déduits de l'*approximation de Bernoulli*, sera désigné par l'expression "*module apparent de rang k*".

En réalité, cette expression est impropre car la principale responsabilité de la non-redondance qui sera illustrée en fin du présent chapitre, doit être attribuée à la géométrie de la poutre, lorsque celle-ci est de faible élancement (on constatera que les modules apparents décroissent lorsque la fréquence augmente).

## II. VIBRATIONS AXIALES D'UNE POUTRE ELASTIQUE FLOTTANTE

La description analytique des vibrations axiales nécessite moins d'hypothèses simplificatrices : par raison de symétrie, les déplacements des points de l'axe de symétrie sont colinéaires à $Ox$ .

La détermination des fréquences propres en vibrations axiales peut généralement être effectuée avec les mêmes moyens expérimentaux, bien que ces fréquences soient plus élevées que celles des vibrations de flexion. Par contre, si l'on s'intéresse à l'amplitude d'un mode de vibration, par exemple en un point donné, la qualité de l'acquisition et de l'enregistrement, doit souvent être digne de la haute fidélité, en raison des difficultés rencontrées lorsqu'on veut exciter les modes de rang élevé.

### II.1 Equation simplifiée du mouvement

Ici on s'intéresse au déplacement $U(x,t)$, suivant la direction $Ox$ d'un point P d'abscisse x de l'axe de la poutre.

On note $N(x,t)$ l'intensité de l'*effort normal* en P à l'instant t . Les autres notations sont identiques au cas des vibrations transversales. A nouveau, on exprime les efforts dus à l'inertie comme si la masse de la poutre était concentrée sur la ligne neutre.

L'équilibre de l'élément compris entre les abscisses $x$ et $x + dx$ s'écrit :

$$N(x + dx) - N(x) = \mu A \frac{\delta^2 U}{\delta t^2} dx = \frac{\delta N}{\delta x} dx$$

En supposant la poutre homogène et l'effort normal $N(x,t)$ uniforme, on peut diviser les deux membres de l'équation d'équilibre par l'aire de la section, de manière à faire apparaître la contrainte $\sigma(x,t) = N(x,t)/A$, laquelle est liée à la déformation longitudinale par : $\epsilon(x,t) = \sigma(x,t)/E$

D'autre part, on peut écrire la déformation $\epsilon(x,t)$ correspondant au petit déplacement $U(x,t)$ :

$$\epsilon(x,t) = \frac{\delta U}{\delta x}(x,t)$$

On obtient finalement l'équation du mouvement :

$$\boxed{\mu . \frac{\delta^2 U}{\delta t^2} = E . \frac{\delta^2 U}{\delta x^2}}$$

avec comme conditions cinématiques aux extrémités : $\frac{\delta U}{\delta x}(0,t) = 0 = \frac{\delta U}{\delta x}(l,t)$

## II.2 Modes propres de vibration

Comme précédemment, on recherche les solutions particulières :

$$U(x,t) = F(x)\sin(2\pi ft + \phi)$$

On a immédiatement l'équation que doit vérifier F(x) :

$$\frac{d^2F}{dx^2} + a^2F = 0$$

Cette équation, dans laquelle on a noté $a^2 = \mu.4\pi^2f^2/E$, admet une infinité dénombrable de solutions, chacune d'elles correspondant à une fréquence distincte. Ces solutions ont la forme :

$$F_k(x) = B_k.\cos(a_k.x)$$

avec $a_k$ racine de $\sin(a.l) = 0$ (i.e. $a_k.l = k\pi$ )

Remarques : . $a_k$ est une grandeur classique apparaissant dans l'étude de la propagation des ondes dans les milieux élastiques non bornés: c'est le nombre d'onde de la pulsation $2\pi f_k$.

. le rapport $2\pi f_k/a_k$ est la célérité des ondes élastiques de compression, c'est aussi la racine carrée du module spécifique $E/\mu$. Cette grandeur a la réputation d'être du même ordre de grandeur (entre 5000 et 6000 m/s) dans les aciers ordinaires et dans le bois sec, suivant la direction du fil.

## II.3 Exploitation : détermination du module dynamique

D'après ce qui précède, les fréquences propres doivent être régulièrement espacées. Par conséquent, deux fréquences propres successives permettent de déterminer leurs rangs avec quasi-certitude et d'en déduire le module d'élasticité dynamique du matériau de la poutre.

Ainsi, connaissant la fréquence $f_k$ du mode propre de rang k on écrit :

$$E = 4\mu l^2 \frac{f_k^2}{k^2}$$

En réalité, le rapport de deux fréquences propres successives n'est pas rigoureusement constant et l'on rencontre lorsque le rang du mode augmente, un phénomène de dispersion géométrique qui n'est pas sans analogies au cas des vibrations transversales. Cependant, le fait que les modules spécifiques du bois soient relativement peu variable suivant les essences permet de se contenter d'une seule fréquence propre, sans risque de confusion sur le rang du mode sollicité.

Dans le cas du bois, il existe une procédure normalisée qui utilise cette propriété pour déterminer le module d'élasticité suivant la direction longitudinale d'une éprouvette sans défaut, à partir de la fréquence propre du mode de premier rang, pour lequel les incertitudes expérimentales sont plus importantes que le biais correspondant à la dispersion géométrique.

## II.4 Regard sur la norme soviétique GOST 16483.31 [43]

II.4.1 *L'objet de la norme* est la spécification d'une méthode de détermination par résonance des modules d'élasticité et de cisaillement (ainsi que des décréments logarithmiques). Son élaboration est attribuée à l'Institut Central de Recherche Scientifique sur la Mise en Oeuvre Mécanique du Bois.

Son domaine d'application se limite aux éprouvettes parallélépipèdiques de bois sans défaut, stabilisées en environnement contrôlé.

Le mode opératoire conduit à déterminer, en premier lieu, la première fréquence de résonance en vibrations longitudinales (notée $f_L$), d'une éprouvette de dimensions h = 20mm, b = 20mm, l = 300mm, de masse $m_0$, aux extrémités de laquelle des pastilles en acier sont rapportées par collage. L'excitation modulée en fréquence, est créée à l'aide d'un électro-aimant.

N.B. Cette première fréquence propre est de l'ordre de 7 à 8 KHz.

Le module E en est déduit par la relation $E = 4\mu l^2 f_L^2 \left[ 1 + \frac{2m_1}{m_0} \right]^2$

où $m_1$ est la masse de la surcharge correspondant aux pastilles rapportée à chacune des extrémités ($m_0+2m_1$ est la masse totale de l'éprouvette au moment de l'essai, alors que $m_0$ est la masse du bois).

Dans un deuxième temps, il s'agit de déterminer la fréquence de résonance du second mode de vibrations en flexion (notée $f_F$), c'est-à-dire la fréquence propre la plus basse, compte tenu du mode de fixation à mi-longueur de l'éprouvette (qui serait un ventre du premier mode de vibration).

N.B. Si l'éprouvette obéit à l'équation de Bernoulli, cette deuxième fréquence est attendue dans la plage de 2 à 3 KHz (37.8% de $f_L$).

Pratiquement, cette seconde fréquence n'est pas redondante à la première et la norme fournit une expression permettant de déterminer le module de cisaillement dans les deux directions de la poutre correspondant au plan du mouvement, c'est-à-dire en principe un des plans **LT** ou **LR** :

$$G = \frac{4\pi^2}{K} \mu l^2 . f_F^2 \left[ 4,67 - \frac{f_F^2}{f_L^2} \right] \left[ 1 + \frac{2m_1}{m_0} \right]^2 \left[ A - B.\frac{f_F^2}{f_L^2} \right]^{-1}$$

où $A$ = 385,77 est une constante (sans rapport à l'aire de la section)
$B$ = [ 12(l/h)² + 108,92 ] = 2810
et $K$ = 94.5 %

Dans le texte original de la norme (cf. traduction jointe aux références bibliographiques), la masse volumique est remplacée par le rapport de la masse $m_0$ de l'éprouvette seule à son volume bhl .

L'hypothèse d'homogénéité, les tolérances d'usinage et la précision exigée lors de la mesure des dimensions sont en effet telles que la masse volumique est ainsi déterminée avec une incertitude n'excédant pas 1 à 2% .

D'autre part, on note que l'effet des pastilles rapportées sur les fréquences est pris en compte de manière indépendante, par un terme multiplicatif qui vaut 1 dans le cas où la poutre est sans surcharge aux extrémités. On retrouverait alors l'expression vue en II.3 pour l'interprétation de $f_L$.

II.4.2 *Commentaires* :

a) Considérant que le module E est valablement déduit de la fréquence propre de premier rang en vibrations axiales et qu'il est effectivement indépendant de la fréquence, la détermination de G par cette méthode est particulièrement intéressante.

En effet, la même éprouvette permet de découpler les effets du cisaillement suivant que l'on considère un mouvement de flexion dans l'un ou l'autre des plans d'anisotropie (ici, RL et TL), alors que dans un essai de torsion se pose le problème de l'anisotropie transverse :

L'expression qui donne le module élastique de cisaillement G, lorsque l'on connaît E (i.e. une fréquence propre de vibrations axiales) et une fréquence propre en flexion découle d'une approximation qui a été établie par Goens [19]. Elle s'applique aux vibrations naturelles d'une poutre flottante élastique obéissant au modèle de Timoshenko. A la différence de la théorie élémentaire vue plus haut, ce modèle fait en effet apparaître plusieurs termes complémentaires dans l'équation du mouvement, en faisant intervenir notamment le rapport du module d'élasticité E au module de cisaillement G dans le plan du mouvement.

b) Bien que la démarche proposée par la norme GOST soit une valorisation très intéressante du modèle de Timoshenko, l'utilisation des vibrations forcées suivant les deux types de vibration conduit à un protocole assez lourd.

D'autre part, bien que ce soit quelque peu anticipé, remarquons que si l'on admet que lorsque l'on aborde l'interprétation de la fréquence propre de second rang en flexion, un seul paramètre (en l'occurence G) reste inconnu, on peut désormais facilement déterminer sa valeur par résolution numérique de l'équation du mouvement (ce qui n'était pas le cas à l'époque où Goens a développé l'approximation mentionnée ci-avant).

c) La méthode de caractérisation expérimentale que nous avons retenue, autorise un dépouillement automatique en mettant néanmoins en oeuvre une approximation, légèrement différente de celle de Goens en raison de la très forte anisotropie du matériau, dont nous allons justifier l'adéquation lorsque l'on se place dans les conditions suivantes :

- La poutre flottante obéit au modèle de Timoshenko, que nous allons décrire ci-après ; les modes propres de ses vibrations transversales dépendent de deux paramètres indépendants. Le plan du mouvement est en outre supposé être un plan principal d'anisotropie.

- Deux ou plusieurs fréquences propres des vibrations transversales d'une poutre donnée, peuvent être déterminées expérimentalement ; la détermination d'une fréquence propre des vibrations axiales de la même poutre et son exploitation, font l'objet d'un essai indépendant.

## III. VIBRATIONS DE FLEXION : LE MODELE DE TIMOSHENKO

Le modèle de Timoshenko fait intervenir dans l'équation du mouvement, les effets conjugués de l'inertie de rotation et du cisaillement dans le plan du mouvement (Timoshenko [68], Le Nizerhy et al.[35], Roseau [56]).

Il permet de comprendre l'influence de l'élancement sur les fréquences propres des poutres élastiques.

Rappelons que l'on désigne par **module apparent**, le module déduit de la fréquence propre d'ordre k , à l'aide du coefficient $X_k$ rencontré lors de la recherche des modes propres de l'équation de Bernoulli.

### III.1 Effet de la seule inertie de rotation (*approximation de Rayleigh*)

Lord Rayleigh [54] pour déterminer l'équation du mouvement par la méthode des travaux virtuels, indique en premier lieu que l'énergie cinétique d'une tranche de la poutre s'écrit comme une somme de deux termes. Le premier correspond au déplacement de la fibre neutre, et le second correspond à la rotation de la tranche par rapport à sa position au repos (on retrouve donc l'approximation de Bernoulli en négligeant ce second terme).

Connaissant les mouvements "solutions propres" de l'équation de Bernoulli, on peut estimer l'effet de l'inertie de rotation sur la fréquence d'un mode propre en conservant l'enveloppe *F(x)* du mouvement correspondant et en modifiant la fréquence de manière à justifier l'énergie cinétique totale (somme des deux termes) de la poutre ( $0 \le x \le l$ ).

Rayleigh en déduit les valeurs approchées $X_{Rk}$, peu différentes des valeurs des coefficients $X_k$, à utiliser dans l'expression liant la célérité à la fréquence propre du kième mode de vibration (Grüneisen [21]).

$$\textit{Approx. de Rayleigh} : \quad \frac{1}{X_{Rk}} = \frac{1}{X_k} \cdot \left[ 1 + \frac{h^2}{12l^2} \left[ 6.\theta(m_k) + \theta^2(m_k) \right] \right]^{-1}$$

$$\text{où} \quad \theta(m) = \frac{m.tg(m).th(m)}{tg(m) - th(m)} , \text{ dans le cas de la poutre flottante.}$$

$m_k$ est la racine de rang k en ordre croissant de l'équation :

$$cos(m).ch(m) = 1$$

Ce qui correspond donc, en notant $f_k$ la fréquence propre de même rang à :

$$X_{Rk} = 4\pi^2\mu . \frac{Af_k^2}{EI} . l^4$$

En réalité, le mouvement d'un point n'appartenant pas à l'axe de symétrie de la poutre ne se résume pas à la simple rotation des tranches en raison de la déformation anticlastique. L'effet de celle-ci sur l'énergie totale étant comparativement très faible, nous ne la ferons pas apparaître.

### III.2 Equation du mouvement et modes propres du modèle de Timoshenko

Le modèle de Timoshenko faisant intervenir conjointement l'inertie de rotation et une déformation de cisaillement dans le plan du mouvement, on retrouvera le résultat précédent en faisant l'hypothèse d'un module de cisaillement infiniment grand.

Lorsqu'on néglige les déformations de cisaillement, on fait l'hypothèse que toute section plane de la poutre reste non seulement plane, mais perpendiculaire à l'axe neutre au cours de son mouvement.

Or, il existe en tout point une contrainte de cisaillement qui correspond, à l'échelle d'une section droite, à l'effort tranchant $T(x,t)$ .

Bien que cette contrainte ne soit pas uniforme dans la section, on maintient l'hypothèse des tranches lorsqu'on introduit une déformation globale de glissement représentée par l'angle $\beta$ que fait la normale à la section en mouvement par rapport à la ligne neutre.

On pose comme loi de comportement en cisaillement, l'expression suivante :

$$\beta = \frac{T}{GKA}$$

où G est le *module élastique de cisaillement*, dans le plan $Oxy$.

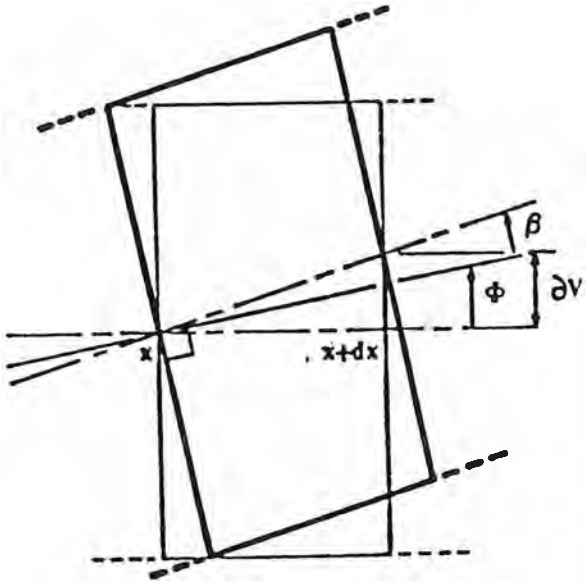
*Le coefficient K est considéré comme un facteur de forme*, puisque le champ de la déformation de glissement dépend de la forme de section droite. La valeur de K a été discutée par de nombreux auteurs (cités par Hearmon [23] et Vinh & al. [76]) .

Pour une poutre de section rectangulaire et dont le matériau est homogène, les approches statiques indiquent K = 5/6. Cependant, dans le cas d'un mouvement rapide, les approches variationnelles conduisent à des facteurs de forme qui dépendent de divers termes de la matrice des complaisances, selon le degré d'anisotropie du matériau.

Au passage, notons que la valeur K = 0.945 , spécifiée (implicitement dans l'original) par la norme GOST semble conventionnelle : elle ne correspond exactement à aucune des études théoriques.

La position angulaire de la section en mouvement par rapport à son état de repos est représentée par $\Phi$ , ce qui amène :

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \Phi + \beta$$



Dans l'équation d'équilibre dynamique des moments, on fait apparaître d'autre part, un terme complémentaire correspondant à l'inertie de rotation des tranches (cf. III.1) :

$$M(x+dx) - M(x) + Tdx = \iint_A \mu \frac{\delta^2\Phi}{\delta t^2} y^2 \, dydzdx$$

L'équilibre dynamique pour l'effort tranchant s'écrit : $\dfrac{\delta T}{\delta x} = \mu A \dfrac{\delta^2 V}{\delta t^2}$

La loi de comportement pour les contraintes normales reste : $M = EI \dfrac{\delta\Phi}{\delta x}$

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\boxed{EI \frac{\delta^4 V}{\delta x^4} - \mu I \left(1 + \frac{E}{KG}\right) \frac{\delta^4 V}{\delta x^2 \delta t^2} + \mu^2 \frac{I}{KG} \frac{\delta^4 V}{\delta t^4} + \mu A \frac{\delta^2 V}{\delta t^2} = 0}$$

On recherche toujours les modes propres sous la forme :

$$V(x,t) = F(x) \, . \, \sin(2\pi f t + \phi)$$

F(x) est solution d'une équation différentielle du quatrième ordre à coefficients constants, du type :

$$\frac{d^4F}{dx^4} + 2b^2 \frac{d^2F}{dx^2} = c^4 F$$

où : $2b^2 = \mu \dfrac{4\pi^2 f^2}{E} \left(1 + \dfrac{E}{KG}\right)$ et $c^4 = \mu \dfrac{4\pi^2 f^2 A}{EI} \left(1 - \mu \dfrac{4\pi^2 f^2 I}{AKG}\right)$

Le cas $c^4 > 0$ est le plus fréquent, au moins pour les modes de faible rang, ce qui mène à écrire F(x) sous la forme :

$$F(x) = D_1.\cos(d_1.x) + D_2.\mathrm{ch}(d_2.x) + D_3.\sin(d_1.x) + D_4.\mathrm{sh}(d_2.x)$$

où $d_1$ et $d_2$ sont les deux réels positifs tenus par les relations :

$$d_1^2 - d_2^2 = 2b^2 \quad \text{et} \quad d_1 . d_2 = c^2$$

Pour rendre l'écriture plus concise, nous allons introduire des variables auxiliaires. La principale, notée $X^*$, est analogue à la variable $X = m^4$, déjà rencontrée au cours de la recherche des modes propres de l'équation de Bernoulli.

Elle est définie par : $\boxed{X^* = 4\pi^2\mu \dfrac{f^2 A}{EI} l^4}$

On gagne d'autre part à utiliser les deux variables suivantes :

$$\boxed{\alpha = \frac{h^2}{12l^2} \quad \text{et} \quad \Gamma = \alpha \frac{E}{KG}}$$

On a alors :

$$d_1^2l^2 - d_2^2l^2 = X^*.(\alpha+\Gamma)$$

$$d_1^2l^2 \,.\, d_2^2l^2 = X^*.(1 - X^*\alpha\Gamma)$$

On peut exprimer $d_1$ et $d_2$ en fonction de $X^*$, de la demi-somme R et de la demi-différence S des variables $\alpha$ et $\Gamma$ : $R = ( \alpha + \Gamma )/2$ et $S = ( \alpha - \Gamma )/2$

$$d_1.l = \left[ \left[ X^* + X^{*2}S^2 \right]^{\frac{1}{2}} + X^*R \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2.l = \left[ \left[ X^* + X^{*2}S^2 \right]^{\frac{1}{2}} - X^*R \right]^{\frac{1}{2}}$$

Les constantes $D_1$, $D_2$, $D_3$ et $D_4$ sont déterminées par les conditions imposées aux extrémités de la poutre flottante.

Les conditions aux limites sur le moment s'écrivent :

$$M(x,t) = 0 = \frac{\delta^2F}{\delta x^2} + \frac{X^*}{l^2}\Gamma F \qquad \text{en } x = 0 \text{ et en } x = l$$

Les conditions aux limites sur l'effort tranchant s'écrivent :

$$\beta(x,t) = 0 = \frac{\delta^3F}{\delta x^3} + \frac{X^*}{l^2}(\alpha+\Gamma)\frac{\delta F}{\delta x} \qquad \text{en } x = 0 \text{ et en } x = l$$

On cherche à annuler le déterminant du système de quatre équations linéaires liant les constantes $D_1$, $D_2$, $D_3$ et $D_4$, ce qui amène la condition :

$$d_1d_2l^2\left[1-\cos(d_1l).\mathrm{ch}(d_2l)\right] + \left[2\alpha(X^*+X^{*2}S^2) - X^*R\right].\sin(d_1l).\mathrm{sh}(d_2l) = 0$$

$$\text{où} \quad R = \frac{\alpha+\Gamma}{2} \quad ; \quad d_1l = \left[ \left[ X^* + X^{*2}S^2 \right]^{\frac{1}{2}} + X^*R \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et} \quad S = \frac{\alpha-\Gamma}{2} \quad ; \quad d_2l = \left[ \left[ X^* + X^{*2}S^2 \right] - X^*R \right]^{\frac{1}{2}}$$

Il apparaît que cette condition est de la forme : $\boxed{H( X^* , \alpha , \Gamma ) = 0}$

De la sorte, on peut considérer que la variable $X^*$ est définie implicitement en fonction de ( $\alpha$ , $\Gamma$ ).

D'autre part on vérifie aisément que dans le cadre de l'approximation de Bernoulli, on avait le cas particulier correspondant à $\alpha = 0 = \Gamma$, soit :

$$H_{0,0}(X) = H(X, 0, 0) = 0.$$

L'approximation de Rayleigh correspond quant à elle, au cas particulier où la variable $\Gamma$ est nulle, c'est-à-dire $R = \alpha/2 = S$, soit :

$$H_{\alpha,0}(X_R) = H(X_R, \alpha, 0) = 0.$$

### III.3 Insuffisance de l'équation de Bernoulli.

D'après ce qui précède, les coefficients $X^*$ sont affectés par le facteur d'élancement $\alpha = h^2/12l^2$, et par le ratio des modules $E/G$ (Anderson [1], Huang [24], Blay & al. [4]).

Si, de manière équivalente, on se donne $\alpha$ et $\Gamma$, *on peut déterminer numériquement les valeurs de* $X^*$ *croissantes qui annulent la fonction* H, c'est-à-dire qui correspondent aux modes propres successifs.

#### III.3.1 *Effets sur les fréquences propres*

A partir de la définition de $X^*$, on voit que les fréquences propres sont proportionnelles à la racine carrée de $X^*$, pour les matériaux élastiques.

Pour fixer les idées, les écarts entre X et $X^*$, rapportés à $X^*$, pour les premiers modes de vibrations en flexion, ont été calculés et sont présentés dans les tableaux qui suivent (tab.1 & tab.2, voir également Annexe A).

Pour les ratios E/KG, on sait que pour certains matériaux composites, ils peuvent être bien supérieurs à 30 (Vinh & al. [76]). Toutefois, cette valeur ne semble pas atteinte par les bois (on peut les situer entre 10 et 20 pour les "bois secs standards", d'après Guitard [22]). Dans les matériaux homogènes et isotropes, ils sont inférieurs à 10 (de l'ordre de 3 pour l'acier).

#### III.3.2 *Effets sur les modules apparents*

a) Lorsqu'il s'agit de la détermination du module apparent, en exploitant une seule fréquence propre (cf. I.3), prendre X au lieu de $X^*$, introduit un biais qui va croissant avec le rang du mode propre d'une part, ou lorsque l'élancement diminue d'autre part, ce qui peut également s'exprimer de la façon suivante:

**Plus la fréquence propre est élevée, plus l'utilisation de l'approximation de Bernoulli conduit à sous-évaluer le module d'élasticité d'une poutre obéissant au modèle de Timoshenko.**

Ceci est illustré par la figure 1, dans le cas d'un matériau dont le module spécifique est pris égal à $25\ 10^6\ m^2/s^2$ et dont le ratio E/KG est pris égal à 15. Les différentes fréquences sont obtenues en agissant sur les caractéristiques géométriques de la poutre.

| E/KG \ l/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4.1 | 1.8 | 1 | 0.7 | 0.5 | 0.2 | - |
| 5 | 9.1 | 4.1 | 2.3 | 1.5 | 1 | 0.4 | 0.1 |
| 10 | 14 | 6.3 | 3.6 | 2.3 | 1.6 | 0.6 | 0.1 |
| 15 | 19 | 8.6 | 4.8 | 3.1 | 2.2 | 0.8 | 0.2 |
| 20 | 24 | 10.8 | 6.1 | 3.9 | 2.7 | 1 | 0.2 |
| 25 | 29.1 | 13.1 | 7.4 | 4.7 | 3.3 | 1.2 | 0.3 |
| 30 | 34.1 | 15.3 | 8.7 | 5.6 | 3.9 | 1.4 | 0.3 |

Tableau 1 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X-X^*}{X^*}\right]$ dans le premier mode propre

| E/KG \ l/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9.1 | 4 | 2.3 | 1.5 | 1 | 0.4 | 0.1 |
| 5 | 27.3 | 12.3 | 7 | 4.5 | 3.1 | 1.1 | 0.3 |
| 10 | 45.9 | 20.7 | 11.7 | 7.5 | 5.2 | 1.9 | 0.5 |
| 15 | 64.7 | 29.1 | 16.5 | 10.6 | 7.4 | 2.7 | 0.7 |
| 20 | 83.7 | 37.5 | 21.2 | 13.6 | 9.4 | 3.4 | 0.9 |
| 25 | 102.9 | 46 | 26 | 16.7 | 11.6 | 4.2 | 1.1 |
| 30 | 122.2 | 54.5 | 30.8 | 19.7 | 13.7 | 5 | 1.2 |

Tableau 2 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X-X^*}{X^*}\right]$ dans le second mode propre

**Tableaux 1 et 2 : Valeur prédictive de la théorie élémentaire**

N.B. 1: Les zones ombrées correspondent à la majorité des cas susceptibles d'être rencontrés lors de l'étude du module longitudinal du bois, à partir d'éprouvettes parallélépipèdiques axées.

N.B. 2: La première ligne correspond à $X^* = X_R$ (approximation de Rayleigh)

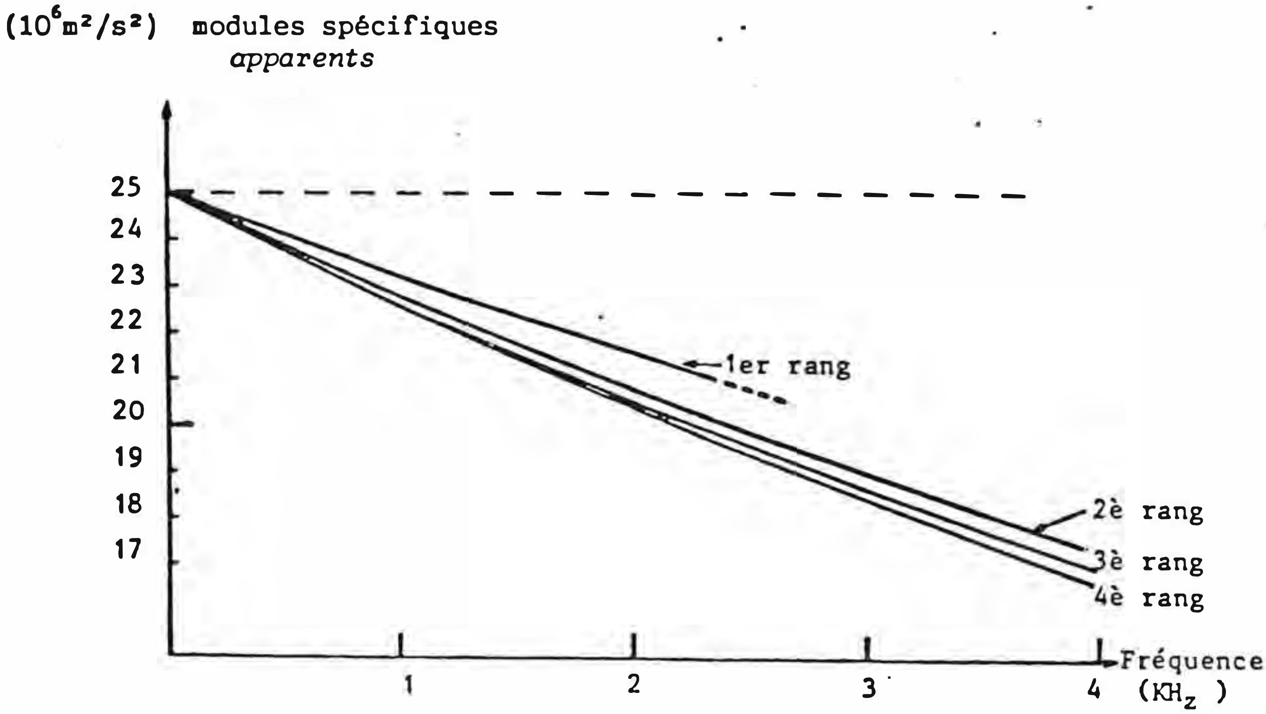



**Figure 1** : Relation entre modules apparents (rangs 1 à 4) et fréquence. d'après la résolution numérique de l'équation $H = 0$, en faisant varier la longueur de la poutre pour $E = 15KG = 25\ 10^6\ m^2/s^2$.

Etre prévenu ne suffit malheureusement pas car, en général, on ignore G autant que E, mais on se rapprocherait d'une solution exacte en déterminant ces deux modules à partir d'une série d'observations dans des conditions d'élancement déterminées.

Il est toujours possible, par exemple à partir de la connaissance de deux fréquences propres, de résoudre numériquement un système de deux équations à deux inconnues. Toutefois l'expression de $H( X^* , \alpha , \Gamma )$, force à l'utilisation d'algorithmes assez compliqués et se généralisant mal aux cas où l'on disposerait de davantage de fréquences propres, et donc d'équations, pour le même nombre d'inconnues

**b)** La figure 2 illustre l'effet de l'élancement sur les modules apparents pour les 4 premiers modes de vibration en flexion d'une poutre dont le module spécifique vaut $25.10^6$ USI .

Les élancements ordinaires correspondent à la partie gauche de la figure. Si l'on prend à titre d'exemple, une éprouvette en bois destinée à la détermination du module d'élasticité en flexion statique suivant la Norme Française B51-016, son élancement nominal est 18, soit $\alpha = 25.7.10^{-5}$ .

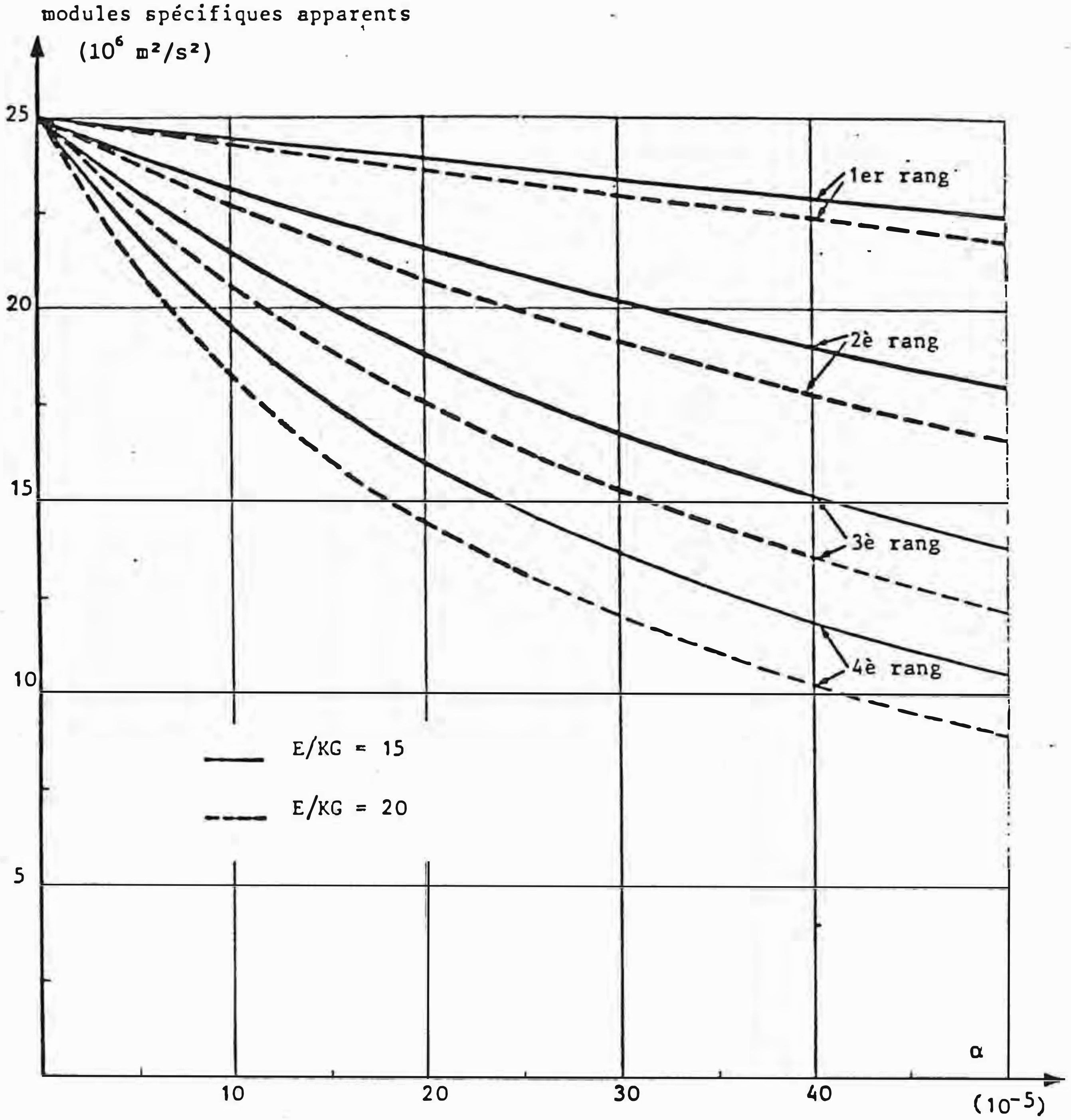



figure 2 : Relation entre modules apparents et facteur α $= \frac{1}{12}\left[\frac{h}{l}\right]^2$
( rangs 1 à 4 , $\tau$ = E/KG fixés )

On peut constater d'autre part, que l'effet de l'élancement est presque linéaire pour les modes propres de rangs 1 et 2, mais que la pente moyenne des courbes est fortement dépendante du ratio des modules d'élasticité et de cisaillement (pour des raisons de lisibilité, ne sont représentées sur cette figure que les courbes correspondant aux valeurs 15 et 20 de ce ratio).

> La figure 3 illustre l'effet du rapport du module d'élasticité au module de cisaillement (pondéré par le facteur de forme), sur les modules apparents pour les 4 premiers modes de vibration en flexion d'une poutre dont le module spécifique vaut $25.10^6$ USI .

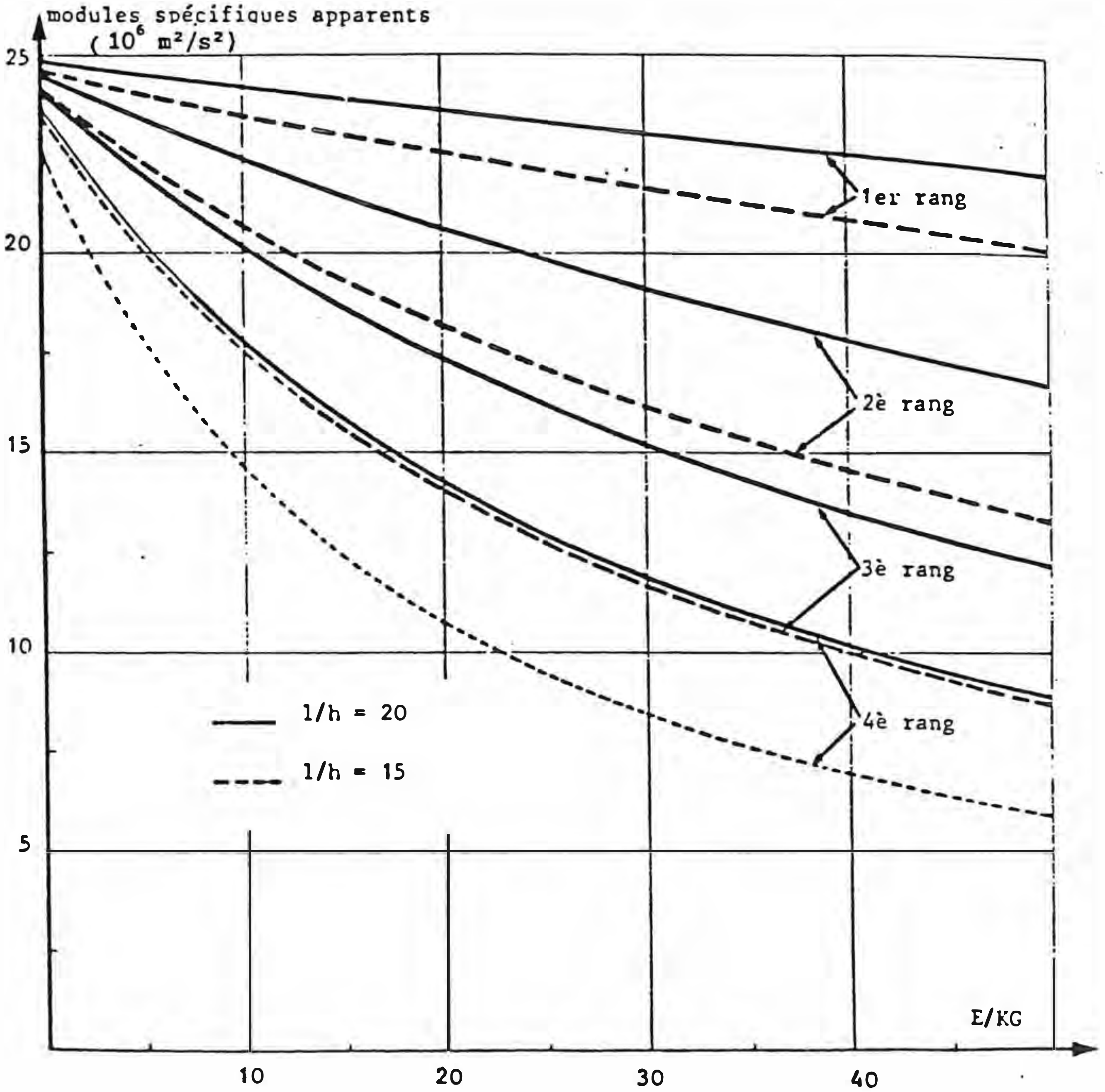



figure 3 : Relation entre modules apparents et ratio $\tau$ = E/KG
( rangs 1 à 4, $\alpha$ fixés, K est un facteur de forme, proche de 1, dépendant de la géométrie de la section droite )

Les matériaux usuels se situent dans la partie gauche de la figure 3. Pour prendre un exemple, considérons une éprouvette en bois de feuillu sec standard sollicitée suivant la direction tangentielle, le ratio des modules est de l'ordre de 16 (Guitard [22]).

On peut constater d'autre part, que l'effet du ratio des modules est lui aussi presque linéaire pour les modes propres de rangs 1 et 2. L'effet de l'élancement sur la pente de ces courbes est très net (pour ne pas surcharger la figure, ne sont toutefois représentées que les courbes correspondant aux valeurs 20 - en traits pleins - et 15 - en pointillés - de l'élancement).

Les figures 2 et 3 conduisent assez naturellement à chercher à décrire la relation entre module d'élasticité et module apparent, par une fonction linéaire de $\alpha$ et $\Gamma$. Une telle linéarisation pourra s'appliquer sans trop de restriction lorsque $\alpha$ et $\Gamma$ sont petits (élancement > 25), ou lorsqu'on se limite aux deux premiers modes.

Pour l'expérimentateur, poser ces restrictions du domaine d'application correspond tout simplement à s'interdire l'utilisation de fréquences trop élevées à fin de détermination du module spécifique (sur les figures 2 et 3, les parties de courbes qui correspondent à des fréquences supérieures à 5KHz sont représentées en trait plus fin). L'approximation linéaire, en permet toutefois une détermination meilleure que tout module apparent, par exploitation simultanée d'au moins deux fréquences propres d'une poutre donnée.

## III.4 Les approximations linéaires

Ainsi, $\alpha$ et $\Gamma$ étant supposés petits, on se propose de rechercher, pour chaque valeur $X_k^*$, racine de l'équation $H(X^*,\alpha,\Gamma) = 0$, une valeur approchée par linéarisation de la fonction H au voisinage de $(X_k,0,0)$.

En effet, les valeurs $X_k$ sont bien connues (cf I.2) et ne dépendent ni de $\alpha$ ni de $\Gamma$. En outre, dans le cas des matériaux usuels et pour des poutres suffisamment élancées, on aura $\alpha$ et $\Gamma$ voisins de 0.

Désormais, le problème n'est plus de déterminer les fréquences propres de la poutre à partir de ses caractéristiques géométriques et mécaniques. Les vitesses de calcul des ordinateurs permettent en effet d'obtenir ces valeurs en quelques secondes par résolution numérique de l'équation $H = 0$ .

*Ici, on suppose être capable de déterminer expérimentalement plusieurs fréquences propres d'une poutre flottante et on se propose, connaissant ses caractéristiques géométriques, de déterminer les propriétés mécaniques de la poutre que sont le module spécifique $E/\mu$ et le ratio $\tau = E/KG$.*

Pour linéariser H, on procède à un développement en série de Taylor de cette fonction à trois variables. Pour alléger l'écriture de ce développement, les indices k de rang des racines ne sont pas retranscrits.

### III.4.1 *Approximation linéaire au premier ordre*

Le développement de la fonction H en série de Taylor au voisinage de $(X,0,0)$ s'écrit :

$$H = H(X,0,0) + (X^*-X)\frac{\delta H}{\delta X}(X,0,0) + \alpha\frac{\delta H}{\delta \alpha}(X,0,0) + \Gamma\frac{\delta H}{\delta \Gamma}(X,0,0) + o_1(X^*-X,\alpha,\Gamma)$$

On sait déjà que $H(X,0,0) = 0$ ,
négliger d'autre part le terme $o_1(X^*-X,\alpha,\Gamma)$ permet d'obtenir une approximation "linéaire" $X_L$ de $X^*$ par :

$$(X_L-X).\frac{\delta H}{\delta X}(X,0,0) + \alpha.\frac{\delta H}{\delta \alpha}(X,0,0) + \Gamma.\frac{\delta H}{\delta \Gamma}(X,0,0) = 0$$

Les dérivées partielles peuvent s'écrire, en fonction de $m = X^{1/4}$, racine de l'équation *cos(m).ch(m) = 1* (cf I.2) :

$$\frac{\delta H}{\delta X}(X,0,0) = \frac{tg(m) - th(m)}{4m}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \alpha}(X,0,0) = m^3.\frac{m^2[tg(m) + th(m)] + 6m.tg(m)th(m)}{4}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \Gamma}(X,0,0) = m^3.\frac{m^2[tg(m) + th(m)] - 2m.tg(m)th(m)}{4}$$

Ce qui donne :

$$X_L - X = - X.\Big[ \alpha.[ \theta^2(m) + 6.\theta(m)] + \Gamma.[ \theta^2(m) - 2.\theta(m)] \Big]$$

Où $\theta(m) = m.\dfrac{tg(m).th(m)}{tg(m) - th(m)}$ et $\theta^2(m) = m^2.\dfrac{tg(m) + th(m)}{tg(m) - th(m)}$

Si l'on fait tendre Γ vers 0, on retrouve - au premier ordre - l'effet de l'inertie de rotation tel que l'avait fait apparaître Rayleigh (cf III.1). Ceci correspond en effet à faire tendre G vers l'infini et donc la déformation de glissement vers 0.

Notons que l'approximation de Rayleigh est définie sur les inverses de X et $X_R$. Pour la comparaison, il est naturel d'introduire, comme approximation de $X^*$ au premier ordre, la valeur $X_B$ définie par :

$$\frac{1}{X_B} - \frac{1}{X} = + \frac{1}{X}\Big[ \alpha.[ \theta^2(m) + 6.\theta(m)] + \Gamma.[ \theta^2(m) - 2.\theta(m)] \Big]$$

Cette expression peut être obtenue soit par la méthode du développement en série de Taylor, après changement de variable ($U^* = 1/X^*$), soit en prenant l'inverse de l'expression de $X_L$ transcrite ci-avant.

Comme on le verra plus loin, cette approximation $X_B$ donne des résultats satisfaisants, mais Goens [19] lui ajoute un terme complémentaire que plusieurs auteurs ont utilisé (Hearmon [23], Kollmann [30], Ono & Kataoka [46], Sobue [62]).

Ce terme complémentaire a été également pris en compte par les rédacteurs de la norme GOST où on le retrouve sous la forme d'une constante ( notée A [43]; cf. II.4).

### III.4.2 *Approximation de Goens*

Le terme complémentaire introduit par Goens est du deuxième ordre en (α,Γ), pour l'établir, Goens décomposa la fonction $H(X^*, \alpha, \Gamma)$, en utilisant simultanément les considérations suivantes, valables lorsque α et Γ sont tous deux petits :

> $X^*$ est peu différent de X
> th(m) est peu différent de 1
> $d_1.l$ et $d_2.l$ sont peu différents de $m = X^{1/4}$

Ce qui lui permit d'établir l'approximation X' définie par :

$$\frac{1}{X'} - \frac{1}{X} = + \frac{1}{X}\left[ \alpha.(m^2 + 6m) + \Gamma.(m^2 - 2m) - X'.\alpha.\Gamma \right]$$

Constatant d'autre part que $\theta(m) \approx m$ et connaissant les approximations linéaires au premier ordre, il en découle l'expression suivante :

$$\frac{1}{X'} - \frac{1}{X} = + \frac{1}{X}\left[ \alpha.[\ \theta^2(m) + 6.\theta(m)] + \Gamma.[\ \theta^2(m) - 2.\theta(m)] - X'.\alpha.\Gamma \right]$$

N.B. Ce terme complémentaire $X'.\alpha.\Gamma$ peut paraître tombé du ciel, pour l'instant, notons toutefois qu'il présente l'intérêt de ne comporter le ratio $\tau = E/KG$ qu'au premier ordre au travers de $\Gamma$.

Il n'est cependant pas exact de considérer qu'il représente l'ensemble des termes du second ordre en $\alpha$ et $\Gamma$, par conséquent la valeur de X' qui se trouve dans la partie droite de l'égalité doit être prise égale à $X = m^4$ .

Ce qui conduit à l'expression, que nous appellerons *approximation de Goens* $X_G$ (bien qu'elle diffère un peu de l'originale X' ci-dessus) :

$$\frac{X}{X_G} = 1 + \alpha.[\ \theta^2(m) + 6.\theta(m)] + \Gamma.[\ \theta^2(m) - 2.\theta(m) - m^4.\alpha\ ]$$

N.B. Il s'agit toujours d'une approximation linéaire, car le facteur $\alpha$ n'est jamais considérée comme une inconnue. En effet quelle que soit la problématique dans laquelle on fait intervenir le modèle de Timoshenko, on suppose toujours qu'un paramètre aussi simple que l'élancement d'une poutre de section constante est descriptible.

### III.4.3 Exploitation : *détermination des deux modules d'élasticité*

A partir de la définition de $X^*$ en fonction du module spécifique et de la fréquence, on peut exploiter les résultats précédents, de la même façon qu'en II.3 . Les différentes approximations linéaires amènent une relation assez simple entre le carré de la fréquence propre de rang k et les caractéristiques mécaniques $E/\mu$ et $\Gamma = \alpha.E/KG$ , sous la forme :

$$\frac{E}{\mu} = \frac{(2\pi f_k.l)^2}{X_k.\alpha}.\left[ 1 + \alpha.F_1(m_k) + \Gamma.[\ F_2(m_k) - \epsilon_k\ ] \right]$$

Pour un mode propre d'ordre k donné, $m_k$ est la racine de même ordre de l'équation :

$$\cos(m).\mathrm{ch}(m) = 1 \iff H(\ X=m^4\ ,\ \alpha=0\ ,\ \Gamma=0\ ) = 0$$

Les notations $F_1(m)$ et $F_2(m)$, que l'on peut attribuer à Hearmon [23] correspondent à :

$$F_1(m) = \theta^2(m) + 6.\theta(m)$$

$$F_2(m) = \theta^2(m) - 2.\theta(m)$$

$\theta(m)$ étant une fonction connue de m, telle que $\theta(m_k)$ tend d'ailleurs très rapidement vers $m_k$ quand k augmente, on peut tabuler les valeurs utiles de m, X, $F_1$ et $F_2$ (tableau 3).

| Rang k | $m_k$ | $X_k$ | $F_1(m_k)$ | $F_2(m_k)$ | $10^3.F_2/X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.7300 | 500.56 | 49.481 | 12.303 | 24.6 |
| 2 | 7.8532 | 3803.5 | 108.925 | 46.050 | 12.1 |
| 3 | 10.9956 | 14618 | 186.87 | 98.905 | 6.77 |
| 4 | 14.1372 | 39944 | 284.68 | 171.59 | 4.30 |
| 5 | 17.2788 | 89135 | 402.23 | 264.00 | 2.96 |
| 6 | 20.4204 | 173881 | 539.51 | 376.15 | 2.16 |
| k>6 | $(2k+1)\pi/2$ | $m_k^4$ | $m_k^2+6m_k$ | $m_k^2-2m_k$ | ... |

Tableau 3 : Paramètres fixes entrant dans les approximations linéaires.

N.B. Le terme complémentaire $\epsilon_k$ est négligé dans le cas de l'approximation au premier ordre $X_B$. Il est évalué à $X_k.\alpha$ dans le cas de l'approximation de Goens $X_G$ (cf. III.4.1&2) .

L'incidence de ce terme sera discutée plus loin, pour le moment, admettons qu'il soit indépendant de $\Gamma$ .

On veut utiliser un ensemble de fréquences propres $f_k$ de la poutre pour déterminer les grandeurs "techniques" e = $E/\mu$ et $\tau = \Gamma/\alpha = E/KG$. Pour ce faire, la linéarité de ces relations d'approximation est évidemment d'une commodité séduisante :

Si pour une poutre donnée, on connaît $\alpha$ ainsi que les n fréquences propres de rang k = 1, ...., n et si on peut utiliser n relations du type :

$e = a(k) + \tau.b(k)$ où les a(k) et b(k) sont connus.

Alors e et $\tau$ peuvent en être déduits en les considérant comme les coefficients d'une droite de regression linéaire dans l'ensemble des points a(k), b(k) (i.e. par une méthode des moindres carrés, Hearmon [23]).

**III.5 Etude comparative des approximations linéaires.**

Les solutions $X_k^*$ de l'équation $H(X^*, \alpha, \Gamma) = 0$ , peuvent être obtenues numériquement, ce qui permet d'évaluer la qualité d'une approximation si l'on se donne différents ratios de modules $\tau$ et différents élancements $\alpha$.

Au préalable, on peut faire la remarque suivante au sujet des approximations linéaires au premier ordre (cf. III.4.1) :

Sur le papier, $X_L$ et $X_B$ sont équivalentes, leurs expressions devenant, en introduisant :

$$\epsilon_1 = \alpha.[\ \theta^2(m) + 6.\theta(m)\ ] + \Gamma.[\ \theta^2(m) - 2.\theta(m)\ ]$$

$$X_L = X.(\ 1 - \epsilon_1\ ) \quad \text{et} \quad X_B = X\ /\ (\ 1 + \epsilon_1\ )\ .$$

### III.5.1 *Effet de la troncature du développement de Taylor*

a) *Les fonctions implicites définies par* **H = 0**

La régularité de la fonction $H(\ X^*\ ,\ \alpha\ ,\ \Gamma\ )$, permet d'envisager l'existence de fonctions implicites $U_k(\alpha,\Gamma)$ qui vérifient les conditions suivantes:

$$\frac{1}{X_k} = U_k(0,0) \qquad \text{et} \qquad H\left[\frac{1}{U_k(\alpha,\Gamma)}\ ,\ \alpha\ ,\ \Gamma\right] = 0$$

*Chaque fonction $U_k$ est définie d'un voisinage de (0,0) vers un voisinage de $1/X_k$.*

On peut alors montrer qu'existent des relations simples entre les termes du développement en série de Taylor de la fonction $H(X^*=1/U^*,\alpha,\Gamma)$ au voisinage de $(X_k,0,0)$ et ceux du développement en série de Mac-Laurin de la fonction $U_k$ au voisinage de (0,0) , c'est-à-dire entre les dérivées partielles successives de H et de $U_k$ respectivement, en ces points.

Cette considération permet d'écrire :

$$\frac{X}{X^*} = 1 + \alpha.[\ \theta^2(m) + 6.\theta(m)] + \Gamma.[\ \theta^2(m) - 2.\theta(m)\ ] - \epsilon^*(\alpha,\Gamma)$$

Le signe "-" devant $\epsilon^*$ est arbitraire, l'important étant que ce terme complémentaire soit *une fonction des seules variables $\alpha$ et $\Gamma$* .

Le terme $\epsilon_G = \Gamma.m^4.\alpha$, proposé par Goens, doit être regardé comme une écriture simplifiée de l'expression de $\epsilon^*(\alpha,\Gamma)$ à l'ordre 2.

b) *Portée du terme complémentaire* : $\epsilon_G = \Gamma.m^4.\alpha$

Dans le membre de droite de l'expression correspondant à l'approximation de Goens (cf. III.4.2) , $\Gamma$ est en facteur du terme ( $F_2(m) - m^4.\alpha$ ) . Or, comme on a pu le voir (tab. 3), le rapport $F_2(m)/m^4$ diminue rapidement lorsque le rang du mode augmente.

Par conséquent, pour des poutres d'élancement "ordinaire" ( par exemple : $l = 15.h \iff \alpha = 0{,}37.10^{-3}$ ), la présence de ce terme complémentaire peut avoir un effet significatif, sous réserve de sa représentativité.

De même, la troncature au premier ordre du développement en série, c'est-à-dire l'absence de $\epsilon^*$, peut conduire à un biais important pour les modes de rangs élevés.

### III.5.2 *Première vérification : prévision des fréquences propres*

On se propose ici, de comparer les trois approximations linéaires, notées $X_L$, $X_B$ et $X_G$ (cf. III.4) aux racines $X^*$, déterminées à la troisième décimale, par résolution numérique de l'équation $H\ [\ X^*\ ,\ \alpha = h^2/12l^2\ ,\ \Gamma = \alpha.E/KG\ ] = 0$ ; $X^*$ étant par définition proportionnel au carré de la fréquence propre.

Pour ces comparaisons, les écarts relatifs des valeurs approchées aux racines ont été établis pour les valeurs représentatives de la variabilité de l'élancement et du ratio des modules déjà rencontrées en III.3.1 .

Les tableaux 4 à 6, ci-après, représentent les résultats obtenus pour le second mode propre. Les premières conclusions s'appliquent toutefois au modes de rangs 1 à 5 (cf. annexes B & C).

> L'expression $X_L$ est inadéquate (tab. 4)

Ceci justifie le choix de la variable $U^* = 1/X^*$ et permet d'écrire la relation entre $E/\mu$, $\alpha$ et $\Gamma$ sous une forme qui cautionne l'utilisation de la méthode des moindres carrés (cf. III.4.3).

| E/KG | l/h: 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - 0.8 | - 0.2 | - | - | - | - | - |
| 5 | - 8.7 | - 1.8 | - 0.6 | - 0.2 | - 0.2 | - | - |
| 10 | - 23.4 | - 4.8 | - 1.5 | - 0.6 | - 0.3 | - | - |
| 15 | - 45.1 | - 9.1 | - 2.9 | - 1.2 | - 0.6 | - 0.1 | - |
| 20 | - 74 | - 14.9 | - 4.8 | - 2 | - 1 | - 0.1 | - |
| 25 | | - 22.1 | - 7.1 | - 2.9 | - 1.4 | - 0.2 | - |
| 30 | | - 30.8 | - 9.8 | - 4 | - 2 | - 0.3 | - |

Tableau 4 : Ecart relatif $100.\left(\dfrac{X_L - X^*}{X^*}\right)$ où $\dfrac{X_L}{X} = 1 - \alpha.F_1(m) - \Gamma.F_2(m)$

( m = 7.8532 <=> 2nd mode )

> Les expressions $X_B$ et $X_G$ sont très proches

Comme il se doit, le terme complémentaire de Goens affecte peu une approximation au premier ordre fort satisfaisante en elle-même.

La comparaison des tableaux 5 et 6 montre ainsi que $X_B$ sous-estime légèrement $X^*$ , alors que $X_G$ surestime cette valeur. Dans tous les cas, on reste dans des limites acceptables, même pour les faibles élancements.

| E/KG \| 1/h: | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | - | - | - |
| 5 | - 0.8 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - | - |
| 10 | - 1.1 | - 0.3 | - 0.1 | - 0.1 | - | - | - |
| 15 | - 1.2 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - |
| 20 | - 1.1 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - |
| 25 | - 1 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - 0.1 | - | - |
| 30 | - 0.9 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - 0.1 | - | - |

Tableau 5 : Ecart relatif $100.\left(\frac{X_B - X^*}{X^*}\right)$ où $\frac{X}{X_B} = 1 + \alpha.F_1(m) + \Gamma.F_2(m)$

( m = 7.8532 <=> 2nd mode )

| E/KG \| 1/h: | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | - | - | - |
| 5 | 0.3 | - | - | - | - | - | - |
| 10 | 0.7 | 0.1 | - | - | - | - | - |
| 15 | 1.2 | 0.2 | 0.1 | - | - | - | - |
| 20 | 1.8 | 0.3 | 0.1 | - | - | - | - |
| 25 | 2.3 | 0.5 | 0.1 | 0.1 | - | - | - |
| 30 | 2.7 | 0.6 | 0.2 | 0.1 | - | - | - |

Tableau 6 : Ecart relatif $100.\left(\frac{X_G - X^*}{X^*}\right)$ où $\frac{X}{X_G} = 1 + \alpha.F_1(m) + \Gamma.F_2(m) - \alpha\Gamma X$

( m = 7.8532 <=> 2nd mode )

Dès le second mode, on note que $X_G$ est plus proche de $X^*$ lorsque le ratio des modules est faible (matériaux isotropes) alors que $X_B$ est une meilleure approximation lorsque ce ratio est élévé (matériaux composites fortement anisotropes).

Le cas du bois étant "intermédiaire", nous proposons ci-après une seconde vérification, en utilisant la méthode des moindres carrés, déjà évoquée plus haut, de manière à déterminer simultanément les deux paramètres E et E/KG.

### III.5.3 *Deuxième vérification : calcul des modules d'élasticité*

On peut supposer que la connaissance, sur des bases expérimentales, de nombreuses fréquences propres permet d'optimiser la détermination des propriétés mécaniques qui entrent en jeu, toujours en admettant que le modèle de Timoshenko s'applique à la poutre.

Pour tester la validité de cette hypothèse, ainsi que l'effet du terme complémentaire $\epsilon_G$, nous allons étudier le cas d'une poutre dont le module spécifique est donné, $e = E/\mu = 25.10^6\ m^2/s^2$.

Lorsqu'on fait varier le ratio $\tau = E/KG$, et l'élancement de la poutre dont on a fixé l'épaisseur ( $h = 20$ mm ), on peut calculer la fréquence propre d'un mode de rang quelconque par résolution numérique de l'équation $H = 0$ .

Nous connaissons donc les pulsations :

$$W_k = 2\pi f_k = \left[ X_k^* \cdot \frac{\alpha}{l^2} \cdot \frac{E}{\mu} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad k = 1,\ldots,n$$

La relation d'approximation linéaire est, en notant $\tau' = \frac{1}{K} \cdot \left[ \frac{E}{G} \right]'$ :

$$E' = 4\pi^2 \mu\, l^2 \cdot \frac{f_k^2}{X_k \alpha} \cdot \left[ 1 + \alpha . F_1(m_k) + \alpha . \tau' . [\, F_2(m_k) - \epsilon_k \,] \right]$$

où E' et τ' sont les valeurs inconnues à déterminer en résolvant "au mieux" un système comportant le même nombre d'équations que de pulsations propres identifiées (au moins 2).

En tenant compte de tout les paramètres supposés connus, on peut donc l'écrire sous la forme : $E' = a(k) + \tau' b(k)$

où $a(k) = \frac{X_k^*}{X_k} . E . [\, 1 + \alpha F_1(m_k) \,]$ et $b(k) = \frac{X_k^*}{X_k} . E . \alpha . [\, F_2(m_k) - \epsilon_k \,]$

*La vérification consiste à comparer les valeurs obtenues par la méthode des moindres carrés,* que l'on notera E" et τ", *aux valeurs initiales E et τ, utilisées pour calculer les pulsations propres de la poutre.*

Pour ce faire, on procède à une régression à partir des fréquences propres des **n** premiers modes. Ce nombre n est déterminé suivant deux critères, dont l'origine est expérimentale :

- *n est au plus égal à 5 .*

- *la fréquence propre du mode de rang n est inférieure à 5 KHz.*

Par définition, E" et τ" sont les valeurs de E' et τ' qui minimisent la quantité :

$$\sum_{k=1}^{n} [\, E' - a(k) - \tau' . b(k) \,]^2$$

On trouve :

$$\tau'' = \frac{\Sigma b(k).\Sigma a(k) - n.\Sigma a(k)b(k)}{n.\Sigma b^2(k) \quad - (\ \Sigma b(k)\ )^2}$$

$$\text{et} \quad E'' = 1/n\ [\ \Sigma a(k) + \tau''.\Sigma b(k)\ ]$$

Pour illustrer la comparaison des approximations linéaire $X_B$ et $X_G$, les différences relatives des valeurs calculées, aux valeurs exactes, ont été reportées dans les tableaux 7 à 10.

Les tableaux 7 & 8, ont été établis en prenant $\epsilon_k = \alpha.X_k$ , c'est-à-dire dans le cas de l'approximation $X_G$.

Les tableaux 9 & 10, ont été établis en prenant $\epsilon_k = 0$ , c'est-à-dire dans le cas de l'approximation $X_B$.

Le nombre n de relations linéaires "disponibles" (c'est-à-dire de fréquences propres inférieures à 5 KHz) pour chaque couple de paramètres, a été reporté, entre parenthèses, dans le tableau 7.

Remarque : Compte tenu de l'épaisseur de la poutre, pour les faibles longueurs, il peut arriver que la seconde fréquence propre soit supérieure à 5 KHz.
Dans un tel cas, il est certes concevable d'élargir la fenêtre d'investigation des fréquences propres, on peut cependant poser une valeur "standard" $\tau_S$ (pour $\tau'$) et utiliser la relation :

$$E' = a(1) + \tau_S.b(1) \ ,$$

pour évaluer le module d'Young dynamique du matériau.

> Les tableaux 7 et 9 font la preuve de l'intérêt de la méthode utilisée au cours de cette seconde vérification (approximation linéaire + méthode des moindres carrés), quel que soit le matériau de la poutre. *On retrouvera donc le même processus d'analyse lors de la présentation des moyens expérimentaux mis en oeuvre* (cf. IV).

> Les tableaux 8 et 10 confirment que le terme complémentaire introduit par Goens n'améliore l'évaluation du ratio $\tau$ que pour les grands élancements ou les grandes rigidités en cisaillement.

Dans le cas du bois et des matériaux fortement anisotropes, on ne peut guère présenter ce terme complémentaire comme indispensable !

En effet, il apparaît qu'en ignorant $\epsilon_G$, on sous-estime $\tau$ d'environ 3%, dans le cas d'une poutre éprouvette en bois telle que celle spécifiée par la norme NF B51-016 , c'est-à-dire d'élancement 18 (cf. III.3.2).

Par contre, en utilisant $\epsilon_G$, on surestime la ratio $\tau$ dans la même proportion.

RESULTATS DE LA DEUXIEME VERIFICATION

| E/KG \| 1/h: | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | (1) | 0.0 (2) | 0.0 (3) | 0.0 (4) | 0.0 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) |
| 5 | (1) | 0.0 (2) | 0.0 (3) | 0.0 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) |
| 10 | (1) | 0.1 (2) | 0.1 (4) | 0.1 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) |
| 15 | (1) | 0.2 (3) | 0.2 (4) | 0.1 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) |
| 20 | (1) | 0.3 (3) | 0.2 (4) | 0.2 (5) | 0.1 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) |
| 25 | 1.5 (2) | 0.4 (3) | 0.3 (4) | 0.2 (5) | 0.1 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) |
| 30 | 1.9 (2) | 0.5 (3) | 0.4 (4) | 0.3 (5) | 0.1 (5) | 0.0 (5) | 0.0 (5) |

Tableau 7 : Ecart relatif 100.(E"- E)/E

E" est obtenu par la méthode des moindres carrés, en utilisant les fréquences propres des n premiers modes et la relation d'approximation suivante : $X_{Gk} = X_k.[1 + \alpha.F_1(m_k) + \Gamma.(F_2(m_k) - X_k.\alpha)]^{-1}$

(entre parenthèses : le nombre n de modes)

| E/KG \| 1/h: | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 0.7 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.0 | - 0.9 |
| 5 | | 0.8 | 0.5 | 0.9 | 0.4 | 0.2 | 0.0 |
| 10 | | 1.2 | 1.7 | 1.4 | 0.7 | 0.1 | - 0.1 |
| 15 | | 2.9 | 2.2 | 1.8 | 1 | 0.2 | - 0.1 |
| 20 | | 3.4 | 2.5 | 2.1 | 1.2 | 0.2 | 0.0 |
| 25 | 8.3 | 3.8 | 2.8 | 2.3 | 1.3 | 0.2 | 0.0 |
| 30 | 9.4 | 4.1 | 3.0 | 2.5 | 1.4 | 0.3 | 0.0 |

Tableau 8 : Ecart relatif 100.(τ"- τ)/τ

le ratio des modules τ"= (E/KG)" est obtenu au cours de la même opération que ci-dessus (tab. 7).

RESULTATS DE LA DEUXIEME VERIFICATION ( suite ).

| E/KG \| 1/h: | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 10 | | 0.0 | - 0.1 | - 0.1 | - 0.1 | 0.0 | 0.0 |
| 15 | | - 0.2 | - 0.2 | - 0.1 | - 0.1 | 0.0 | 0.0 |
| 20 | | - 0.2 | - 0.2 | - 0.2 | - 0.1 | 0.0 | 0.0 |
| 25 | 0.2 | - 0.2 | - 0.2 | - 0.2 | - 0.1 | 0.0 | 0.0 |
| 30 | 0.3 | - 0.2 | - 0.2 | - 0.2 | - 0.1 | 0.0 | 0.0 |

Tableau 9 : Ecart relatif 100.(E"- E)/E

E" est obtenu par la méthode des moindres carrés, en utilisant les fréquences propres des n premiers modes et la relation d'approximation suivante : $X_{Bk} = X_k.[1 + \alpha.F_1(m_k) + \Gamma.F_2(m_k)]^{-1}$

| E/KG \| 1/h: | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | - 3.0 | - 3.1 | - 3.1 | - 3.0 | - 1.2 | - 1.2 |
| 5 | | - 2.9 | - 3.0 | - 3.9 | - 2.9 | - 1.0 | - 0.3 |
| 10 | | - 2.6 | - 3.7 | - 3.4 | - 2.6 | - 1.0 | - 0.4 |
| 15 | | - 3.7 | - 3.3 | - 3.0 | - 2.4 | - 1.0 | - 0.3 |
| 20 | | - 3.3 | - 3.0 | - 2.8 | - 2.2 | - 1.0 | - 0.3 |
| 25 | - 1.9 | - 3.0 | - 2.7 | - 2.5 | - 2.0 | - 1.0 | - 0.3 |
| 30 | - 1.2 | - 2.7 | - 2.5 | - 2.4 | - 1.9 | - 0.9 | - 0.3 |

Tableau 10 : Ecart relatif 100.(τ"- τ)/τ

le ratio des modules τ"= (E/KG)" est obtenu au cours de la même opération que ci-dessus (tab. 9).

*Faut-il conserver le terme $X.\alpha.\Gamma$ dans l'approximation linéaire ?*

Avant de conclure sur ce point, nous pouvons discuter de sa représentativité en tant que terme du second ordre du développement en série qui a permis d'établir l'approximation notée $X_B$ .

### III.5.4 *L'approximation au second ordre*

Pour accéder au terme du second ordre, on peut "pousser" le développement en série de la fonction $H(X^*,\alpha,\Gamma)$ (ou de la fonction $U^*$) et déterminer les 6 dérivées partielles nécessaires, de manière à préciser $\epsilon^*(\alpha, \Gamma)$ dans l'expression (cf. III.5.1) :

$$\frac{X}{X^*} = 1 + \alpha.F_1 + \Gamma.F_2 - \epsilon^*(\alpha, \Gamma)$$

Les développements sont épargnés au lecteur, on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon^* = \ & \tfrac{1}{2}.\alpha^2.[ \quad - 9\theta^2(m) + F_1(m).F_3(m) - (2\theta(m) + 11).F_4(m) \ ] \\ & + \alpha.\Gamma.[\ m^4 + 3\theta^2(m) + \tfrac{1}{2}.[F_1(m)+F_2(m)].F_3(m) - (2\theta(m) + 3).F_4(m) \ ] \\ & + \tfrac{1}{2}.\Gamma^2.[ \quad - \theta^2(m) + F_2(m).F_3(m) - (2\theta(m) - 5).F_4(m) \ ] \\ & + o_2(\alpha, \Gamma) \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad F_3(m) = \frac{m^3}{tg(m)-th(m)} \qquad \text{et } F_4(m) = \frac{\theta^4(m)-m^4}{4}$$

$o_2$ représente l'ensemble des termes d'ordre supérieur à 2 ,

$F_3(m_k)$ est toujours petit devant $m_k{}^2$ et $\theta(m_k)$ est voisin de $m_k$,

ce qui donne $\epsilon^*$ peu différent de $X.\alpha.\Gamma - \tfrac{1}{2}.X^{1/2}.(3\alpha - \Gamma)^2$ .

Dans cette expression, c'est évidemment $X.\alpha.\Gamma$ qui domine ce qui montre incidemment que le terme $\epsilon_G$ est bien représentatif de $\epsilon^*(\alpha, \Gamma)$.

En regardant dans le détail les valeurs de $X/X^*$, on peut fixer comme limite la valeur 2, c'est-à-dire que pour $X > 2X^*$ , il vaut mieux se passer du terme complémentaire $\epsilon^*$ (ou $\epsilon_G$) car il augmente l'écart existant entre la valeur approchée $X_B$ et la valeur $X^*$.

Alors que pour $X < 2X^*$ le terme du deuxième ordre permet effectivement de diminuer l'écart entre la valeur approchée $X_G$ et la valeur exacte $X^*$. Mais, comme on observe que dans ce même cas, l'écart relatif est presque toujours inférieur à 1%, il apparaît que le gain éventuel est peu significatif.

Cette proposition est valable pour les 5 premiers modes de vibration, pour les élancements compris entre 10 et 100 et pour un ratio de modules $\tau = E/KG$ inférieur ou égal à 40 (cf. tab. 1,2,5 & 6 et annexes).

## III.6 BILAN

Bien que l'on puisse utiliser avec profit le terme complémentaire proposé par Goens lors de l'étude des matériaux isotropes élastiques, ce terme ne répond pas à nos attentes lorsque le rapport du module d'élasticité au module de cisaillement est grand.

Aux résultats des vérifications qui ne concernent que la qualité des approximations au sens mathématique du terme, ajoutons les deux considérations suivantes :

- Le facteur de forme K n'est pas connu avec certitude. Si l'on veut évaluer la valeur du module de cisaillement G, une erreur de 3% sur $\tau = E/KG$, est secondaire compte tenu de la discussion restant à conclure sur la valeur de K. En effet, suivant les auteurs, plusieurs valeurs comprises entre 5/6 et 0,95 ont pu être proposées.

- Les matériaux ne sont jamais parfaitement élastiques : dans le cadre des petites perturbations, le comportement viscoélastique peut avoir un effet modulé sur les fréquences suivant leur rang. La démarche proposée, basée sur l'exploitation de plusieurs fréquences propres et la méthode des moindres carrés va nous fournir des valeurs composites des modules dynamiques du matériau aux différentes fréquences.

En conclusion, lors des essais de validation expérimentale en vibrations transversales, le terme complémentaire du deuxième ordre sera négligé.

*L'expression qui décrit le mieux la relation entre les caractéristiques physiques de la poutre élastique de Timoshenko et ses fréquences propres est la suivante :*

$$E = 4\pi^2 \underset{\uparrow \alpha}{\mu} l^2 . \frac{f_k^2}{X_k . \alpha} . \left[ 1 + \alpha . [\theta^2(m_k) + 6\theta(m_k)] + \alpha . \frac{E}{KG} . [\theta^2(m_k) - 2\theta(m_k)] \right]$$

où :
$E$ est le module d'élasticité dans la direction de l'axe de la poutre
$\mu$ est la masse volumique
$K$ est le facteur de forme (en principe = 5/6)
$G$ est le module de cisaillement dans le plan de flexion

$\alpha = \dfrac{h^2}{12 l^2}$ ; h est l'épaisseur
t heigh

$l$ est la longueur
$m_k$ est la kième racine positive de l'équation $cos(m).ch(m) = 1$
$X_k = m_k^4$
$\theta(m)$ est la fonction $m . \dfrac{tg(m).th(m)}{tg(m)-th(m)}$
$f_k$ est la kième fréquence propre de la poutre.

## IV DISPOSITIF EXPERIMENTAL

La méthode retenue utilise le principe de l'analyse spectrale des vibrations naturelles de flexion. Ce procédé permet de déterminer les fréquences propres d'une poutre à partir de sa réponse à une excitation impulsionnelle appliquée à une des extrémités de façon à solliciter simultanément tous les modes propres de vibration.

La réponse de la poutre est enregistrée au moyen d'un microphone de mesure disposé perpendiculairement à l'axe de la poutre, à proximité de l'autre extrémité.

Pour minimiser l'influence des supports, l'éprouvette-échantillon repose sur deux bracelets élastiques de faible rigidité. Ainsi, l'éprouvette peut être considérée comme une poutre flottante.

Un micro-ordinateur gère la totalité du traitement de l'information recueillie consécutivement à la percussion appliquée :

- enregistrement. L'onde sonore émise par l'extrémité de la poutre, est transformée en signal électrique. Celui-ci est échantillonné au moyen d'une carte d'extension équipée d'une horloge à 10 MHz. Puis après conversion analogique-numérique, l'enregistrement est transféré directement en mémoire utilisateur.

- spectre. La composition spectrale de l'enregistrement est obtenue par transformée de Fourier. La fenêtre d'investigation est en principe l'intervalle [ 0 , 5 KHz ] , mais la possibilité est offerte de faire varier la limite supérieure entre 40 Hz et 40 KHz.

- exploitation. La poutre est supposée obéir au modèle de Timoshenko. Le contrôle est donné à l'opérateur qui indique, à partir du clavier, les fréquences propres à prendre en compte (nombre et rangs). Le module d'élasticité dynamique et le module de cisaillement dans le plan du mouvement, sont ensuite calculés par la méthode des moindres carrés appliquée à la relation d'approximation linéaire que vérifient ces différents facteurs (cf. III.5.2 & III.6).

### IV.1 Etude des vibrations naturelles

On admet que toute vibration naturelle peut être représentée par une solution d'une équation différentielle à coefficients constants, comme celles rencontrées jusqu'ici.

Dans ces conditions, il est raisonnable de considérer la déformée à tout instant t comme un élément de $H^2(\Omega)$, qui est l'espace des fonctions réelles $V(x,t)$ telles que les deux premières dérivées partielles par rapport à x sont de carré intégrable sur l'ouvert $\Omega = ]0\ ,\ 1[$. Les solutions de l'équation qui satisfont aux conditions cinématiques aux limites $x = 0$ et $x = 1$ forment un sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$ et on peut montrer que les modes propres en constituent une base orthogonale.

Ainsi : $V(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x).\sin(2\pi f_k.t + \Phi_k)$

Toute vibration naturelle peut être exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres, les fonctions $F_k(x)$ peuvent être prises toutes positives.

Ce que l'on peut écrire sous la forme équivalente suivante :

$$V(x,t) = \sum_{k \in Z} G(f_k,x) \exp(\ j.2\pi f_k.t\ ) \qquad \text{où } j = \sqrt{-1}$$

$F_k(x)$ est le module de la fonction complexe $G(f_k,x)$

A $x$ fixé, $G(f_k,x)$ est la valeur de la transformée de Fourier de la fonction $V(x,t)$ pour la fréquence $f_k$ , c'est-à-dire :

$$G(f_k,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x,t).\exp(\ -j.2\pi f_k.t\ ).dt$$

Si V s'écrit comme une somme discrète de termes sinusoïdaux, comme c'est le cas lorsqu'il s'agit de vibrations naturelles, la valeur de la transformée de Fourier de V est nulle "presque partout", c'est-à-dire pour toute fréquence non associée à l'un des modes propres.

Lorsqu'on est en présence d'une vibration naturelle, on peut donc retrouver les fréquences propres comme étant les valeurs pour lesquelles la transformée de Fourier de la fonction décrivant la vibration en un point est non nulle. Ceci suppose bien évidemment que le point considéré ne soit pas un noeud pour le (ou les) mode(s) propre(s) que l'on cherche à déterminer.

## IV.2 La Transformée de Fourier rapide

De nombreux ouvrages décrivent la transformée de Fourier discrète et ses applications en analyse du signal, lesquelles sont bien plus nombreuses que celle dont la présentation très finalisée va suivre. En particulier, la Revue Technique éditée et diffusée par la société Brüel & Kjaer est, pour l'expérimentateur, une source remarquable de "tuyaux" et d'exemples d'application [10].

### IV.2.1 *Echantillonnage du signal*

**a)** Pour procéder à la décomposition d'une vibration réelle suivant ses modes propres, la première étape consiste à enregistrer la fonction $V(x,t)$ ou une de ses dérivées par rapport au temps, en un point donné.

Quelle que soit la chaine d'acquisition retenue, elle se caractérise par une bande passante et il est clair qu'expérimentalement, on ne peut avoir l'ambition de mettre en évidence qu'un nombre limité de modes propres, situés dans une fenêtre à l'intérieur de cette bande passante.

Ainsi, en ce qui concerne l'aspect métrologique, il faut un capteur ayant une bande passante adéquate et qui d'autre part, ne soit pas une cause directe de dissipation d'énergie mécanique. On préférera donc les capteurs de déplacement ou de vitesse sans contact.

b) D'une manière générale, le signal analogique à décomposer ne peut être décrit par une fonction analytique à partir de laquelle on pourrait essayer d'établir l'expression exacte de sa transformée de Fourier.

Par conséquent, il est nécessaire d'échantillonner le signal, ce qui revient à le décrire par une suite finie de valeurs caractéristiques de ses variations pendant un intervalle de temps **T**.

Soit N le nombre de valeurs recueillies pendant l'intervalle T, la fréquence d'échantillonnage est $N/T = F_E$, et le temps écoulé entre deux mesures est : $T_E = 1/F_E$ (Pratiquement, on fixe le nombre N et la fréquence $F_E$ ce qui donne T).

On pourra traiter numériquement cet échantillon "temporel", après une conversion analogique-numérique qui fournit à l'utilisateur une suite de nombres entiers proportionnels au signal électrique à échantillonner (en général il s'agit de ddp).

La vibration au point x, est donc connue sous la forme d'une suite de nombres entiers :

$$Z(i) = V(x, t_i) \; ; \quad t_i = t_0 + i.T_E \qquad (i = 0, \ldots, N-1)$$

c) En raison de la discrétisation du signal à étudier, la valeur de la transformée de Fourier pour la *fréquence* f, est approchée par :

$$g(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Z(i).\exp(-j.2\pi f.i.T_E)$$

- On remarque alors que la fonction g(f) est périodique, de période $F_E$ :

$$\exp(-j.2\pi F_E.i.T_E) = 1$$

- D'autre part, le module de g(f) est le même que celui de $g(F_E - f)$ : ces deux valeurs sont complexes conjuguées, car les Z(i) sont réels.

Ainsi, la connaissance de la fonction complexe g(f) pour les valeurs de f comprises dans l'intervalle $[\ 0\ ,\ \frac{1}{2}F_E\ ]$, permet de déterminer g(f) quelle que soit la valeur réelle de f.

Ceci a une conséquence pratique appelée le "repliement" qui est le fait de considérer les fréquences supérieures à $\frac{1}{2}F_E$ comme des fréquences basses.

Lorsque le signal à étudier contient effectivement des fréquences supérieures à la demi-fréquence d'échantillonnage, comme c'est le cas dans l'analyse des vibrations, il est donc nécessaire de réduire la bande passante du système de mesure de manière à atténuer les fréquences élevées. On parle alors de filtre antirepliement, (filtre analogique passe-bas, la fréquence de coupure étant proche de $\frac{1}{2}F_E$).

- Dans le cas d'une fonction échantillonnée par N points équidistants dans un intervalle T, on peut supposer que les valeurs inconnues de Z(i), c'est-à-dire pour $i < 0$ et pour $i \geq N$ sont toutes nulles.

Cela peut notamment se produire dans le cas d'un signal transitoire dont l'amplitude est amortie pendant T, mais souvent les analyseurs de spectre proposent des fonctions de pondération de façon à assurer que $Z(i) \longrightarrow 0$ quand $i \longrightarrow 0$ ou $i \longrightarrow N$.

Ces pondérations ne sont pas indispensables dans le cas où le protocole expérimental se limite à la recherche des fréquences propres. (Elles ne sont pas gênantes non plus, on peut donc les ignorer ...). Par contre, si l'on attache une importance à la valeur de l'amplitude de la composante du signal à la fréquence f, alors, suivant la nature du signal, toutes les fonctions de pondération ne sont pas équivalentes.

### IV.2.2. *Discrétisation du spectre, Transformée de Fourier discrète*

La nécessité d'échantillonner le signal pour effectuer un traitement numérique, nous a donc conduit à une première approximation de la valeur de la transformée de Fourier en f, en considérant une somme de valeurs discrètes au lieu d'une intégrale sur l'intervalle $]-\infty , +\infty[$ .

L'intervalle $[0 , T[$ est toutefois supposé contenir la totalité de l'information à étudier ( $V(x, t) = 0$ ailleurs).

a) Dans ces conditions, la recherche des valeurs non nulles de la transformée cède la place à une recherche des maxima du spectre (fonction module de g(f)).

L'étendue du spectre est l'intervalle des fréquences (réelles) $[0 , F_S]$ ; comme on l'a vu, la borne $F_S$ doit être inférieure ou égale à $\frac{1}{2}F_E$ en raison du repliement.

L'indispensable filtre antirepliement a une fréquence nominale de coupure en principe égale à $\frac{1}{2}F_E$ ; par définition, cette fréquence correspond à une atténuation de 3 dB. Il atténue inévitablement les composantes légèrement inférieures à cette valeur, alors que certaines composantes légèrement supérieures ne sont pas parfaitement éliminées et donc peuvent, par repliement, apparaître dans le spectre. C'est pourquoi une valeur $F_S$ proche de $40\%.F_E$ est souvent recommandée.

b) La position (fréquence) d'un maximum peut, en principe, être déterminée avec une précision voulue, la fonction g étant définie pour toute valeur de l'intervalle $[0 , F_S]$ .

Une hypothèse simple permet toutefois d'établir un critère de discrétisation du spectre, qui va nous conduire à la définition de la transformée de Fourier discrète (DFT) :

Si l'on considère que le contenu de la fenêtre temporelle $[0 , T[$ représente, non plus la totalité d'un signal transitoire, mais une période d'un signal stationnaire, le spectre de ce signal doit être discret.

En effet, on sait qu'une fonction T-périodique peut s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier dont les termes sinusoïdaux ont des fréquences équidistantes, multiples de l'inverse de la période T.

Ainsi, si l'on retient cette hypothèse, (en introduisant éventuellement une pondération du signal), on peut considérer le spectre de la fonction échantillonnée comme discret, et puisqu'en raison du filtrage, il ne comporte pas de fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage $F_E$, il est entièrement déterminé si l'on connait les valeurs prises par g, aux fréquences $f_k = k/N.F_E$ , $0 \leq k < \frac{1}{2}N$.

Le rapport $F_E/N$ est appelé résolution de la transformée de Fourier discrète (DFT), laquelle est par définition :

$$g(f_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Z(i).\exp\left( -j.2\pi.\frac{kF_E}{N}.\frac{i}{F_E} \right) \quad \text{pour } k = 0,\ldots,(\tfrac{1}{2}N-1)$$

IV.2.3 *Transformée de Fourier rapide* (FFT = Fast Fourier Transform)

On trouve désormais des analyseurs de spectre capables de calculer la plupart des spectres en une fraction de seconde grâce à des composants intégrés qui réalisent une transformée de Fourier rapide. En général, ils incorporent un filtre antirepliement asservi automatiquement à la fréquence d'échantillonnage $F_E$ déterminée par leur utilisateur.

Les versions "haut de gamme" comportent un zoom qui permet d'affiner la représentation du spectre dans un sous intervalle de $[0 , F_S]$

Dans le cas d'une application où l'opérateur n'a pas la possibilité d'intervenir sur le signal à étudier, mais où certaines caractéristiques du spectre peuvent être interprétées directement, il est intéressant de pouvoir coupler l'analyseur à un micro-ordinateur (Sobue [62]).

Ainsi, pour la détermination d'un module d'élasticité à partir de la valeur des fréquences propres d'une poutre, l'opérateur ayant mesuré la masse et les dimensions de la poutre peut d'avoir accès directement au module E ou au module spécifique e = $E/\mu$, s'il n'y a pas de confusion possible sur les rangs des modes utilisés.

Cette approche des problèmes de vibration dans les poutres élastiques a permis la mise en place d'un essai de qualification du module dynamique, qui s'applique à un grand nombre de matériaux à faible amortissement, puisqu'on sait que le module spécifique du bois suivant la direction de ses fibres se compare, parfois avantageusement, à celui de nombreux alliages.

Au cours d'un essai de ce type, le temps de calcul du spectre devient moins important, il suffit qu'il soit inférieur à 1 minute (ordre de grandeur du temps nécéssaire à la préparation de l'éprouvette).

C'est pourquoi, on peut se passer d'un analyseur de spectre (qui est un matériel coûteux), à condition d'avoir un enregistreur de transitoires à fréquence d'échantillonnage programmable, relié à un micro-ordinateur ou mieux encore, une carte d'extension remplissant cette fonction d'enregistrement.

Il est toutefois indispensable d'utiliser un langage compilé et un algorithme FFT.

L'exemple de programme présenté (cf. encadré 1) réalise le calcul des (N/2) valeurs utiles du spectre discret correspondant à un échantillon de N points, N étant une puissance de 2. Le nombre de multiplications effectuées pour venir à bout de ce calcul est de $2N.\text{Log}_2(N/2)$, alors que l'application de la formule de la DFT conduirait à $N^2$ multiplications.

Cette diminution du nombre de multiplications dans le cas où le nombre de points est une puissance de 2 est l'une des transformations de Fourier rapide dites de "Cooley et Tukey" ([3], Dautray & Lions [11], Demars [12]). Le principe en est le suivant :

soit $Z_N(k) = \sum_{i=0}^{N-1} Z(i).\exp(-j.2\pi.k.i/N)$ la transformée à calculer pour un échantillon de $N = 2^M$ points.

Appliquée telle quelle, cette DFT contient 2N multiplications pour chaque valeur de k, soit $N^2$ multiplications au total (sans compter les calculs de $\cos(2\pi.k.i/N)$ et $\sin(2\pi.k.i/N)$ ).

Si l'on distingue les deux sous-échantillons de $N/2 = 2^{M-1}$ points, correspondant respectivement aux valeurs de i paires et impaires, on a :

$$Z_N(k) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}N-1} Z(2i).\exp(-j.2\pi.k.2i/N) + Z(2i+1).\exp(-j.2\pi.k.[2i/N+1/N])$$

soit, en notant $Z^P(i) = Z(2i)$ et $Z^I(i) = Z(2i+1)$, puis en transposant la définition de la DFT pour chaque sous-échantillon :

$$Z_N(k) = Z^P_{\frac{1}{2}N}(k) + Z^I_{\frac{1}{2}N}(k).\exp(-j.2\pi.k/N)$$

Ce qui devient profitable lorsqu'on remarque que :

$$Z_N(k+\tfrac{1}{2}N) = Z^P_{\frac{1}{2}N}(k) - Z^I_{\frac{1}{2}N}(k).\exp(-j.2\pi.k/N)$$

On obtient ainsi deux valeurs du spectre au prix de 2N+4 multiplications.

On recommence cette décomposition autant de fois qu'il y a de puissances de 2 dans le nombre N de points représentatifs du signal. Pour déterminer $Z^P_{\frac{1}{2}N}(k)$ ou $Z^I_{\frac{1}{2}N}(k)$, on utilise des sous-échantillons de $N/4 = 2^{M-2}$ points équidistants etc ... La FFT se déroule en un nombre M de phases successives.

Le gain considérable de temps de calcul qui en résulte permet de réaliser une analyse de spectre "à la carte", c'est-à-dire d'offrir à l'opérateur la possibilité de moduler le nombre de points de l'échantillon en fonction de la résolution souhaitée, puisque celle-ci est est inversement proportionnelle à ce nombre N.

N.B. L'autre moyen d'améliorer la résolution qui consiste à réduire l'étendue du spectre, n'est pas forcément exploitable en présence d'une éprouvette de géométrie fixée).

```
les variables dont les noms commencent par I,J,K,L,M,N ou Z sont
traitées comme nombres entiers, les autres comme nombres réels
IBR(I) est l'entier Binaire Réfléchi de I
N est le nombre de point ; N égale 2 puissance M

   ┌ I=0   : WHILE I < N
   │         L = I + 1
   │         X(L) = Z(IBR(I)) - Z(IBR(L)) : Y(L) = 0
   │         X(I) = Z(IBR(I)) + Z(IBR(L)) : Y(I) = 0
   └ I=I+2 : WEND

2π = 8*ATN(1)
┌ FOR K = 2 TO M : Nk = 2^K : Nk égale 2 puissance K
│
│ ┌ J=0   : WHILE J < Nk/2
│ │         UR = COS( 2π*J/Nk ) : UI = - SIN( 2π*J/Nk )
│ │
│ │   ┌ I=J     : WHILE I < N
│ │   │           L = I + Nk/2
│ │   │           TR = X(L)*UR - Y(L)*UI : TI = X(L)*UI + Y(L)*UR
│ │   │           X(L) = X(I) - TR : Y(L) = Y(I) - TI
│ │   │           X(I) = X(I) + TR : Y(I) = Y(I) + TI
│ │   └ I=I+Nk  : WEND
│ │
│ └ J=J+1 : WEND
└ NEXT K

FOR I = 1 TO N/2 : S(I) = SQR( X(I)*X(I) + Y(I)*Y(I) ) : NEXT I
```

1 : TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE (FFT) EN LANGAGE BASIC

Au cours de la première phase de la FFT, les sous-échantillons sur lesquels on effectue une DFT n'ont que deux points. Ces N/2 couples de points doivent être extraits du N-uplet $(Z(0),\dots,Z(N-1))$ de façon précise de manière à former par assemblage 2 à 2, des quadruplets utilisables pour la seconde phase et ainsi de suite.

La méthode d'extraction peut être définie comme une permutation des indices visant à remplacer l'ordre naturel des indices par un ordre "binaire réfléchi" (Demars [12]) :

Soit $p$ un indice, entier naturel inférieur à $2^M$, il peut être représenté en binaire par un "mot" de M chiffres $(\delta_0, \dots, \delta_{M-1})$ équivalent à :

$$p = \sum_{k=0}^{M-1} \delta_k . 2^k \quad \text{avec } \delta_k = 0 \text{ ou } 1$$

l'indice binaire réfléchi est alors : $q = \sum_{k=0}^{M-1} \delta_k . 2^{M-k}$

Après permutation des valeurs Z(p) et Z(q), les couples de points sont constitués dans l'ordre "naturel" : [ Z(i) , Z(i+1) ], l'indice i étant pair, croissant de 0 à N-2 .

Dans le programme d'application mis en place pour réaliser des essais systématiques, un certain nombre de coefficients sont ainsi nécessaires à la FFT, qui interviennent pour chaque nouveau calcul (i.e. chaque nouvelle éprouvette). Pour améliorer la rapidité d'exécution du programme, ces coefficients peuvent être calculés une fois pour toutes, puis placées dans différents fichiers binaires, pour être appelées en memoire d'exécution suivant les besoins (les tailles de fichiers dépendent notamment du nombre N).

Il s'agit des tableaux d'indices en ordre binaires réfléchis et des valeurs trigonométriques qui interviennent dans les DFT à $2^k$ points.

## IV.3 Matériel et méthode

L'essai de laboratoire proposé, peut être schématiquement décomposé en trois étapes :

a) - préparation, c'est-à-dire mesure de la masse et des dimensions de l'éprouvette, puis positionnement sur les supports élastiques.
- entrée de ces caractéristiques au clavier du micro-ordinateur.
- application d'une percussion à l'une des extrémités de manière à amorcer une vibration naturelle de flexion.

b) - enregistrement du signal caractérisant la vibration naturelle.
- calcul du spectre par FFT.
- recherche des maxima du spectre.

c) - sélection par l'opérateur de la séquence de fréquences propres dans la fenêtre expérimentale (nombre et rangs).
- calcul des modules apparents et du module dynamique (ce dernier par la méthode des moindres carrés comme présenté en III.) .

### IV.3.1 *Equipements*

**a)** En ce qui concerne le signal caractéristique de la vibration en un point $x_0$, trois grandeurs sont en principe équivalentes puisqu'il n'est question que de déterminer les fréquences composant la vibration, indépendamment de leurs amplitudes respectives. Ces grandeurs sont le déplacement $V(x_0, t)$, la vitesse ou l'accélération du point ; pour chacune de ces grandeurs on peut trouver un dispositif métrologique de bande passante adéquate.

A titre d'exemple, citons les capteurs linéaires de proximité basés sur la mesure des dissipations d'énergie par courant de Foucault dans le matériau "cible", qui permet d'accéder à la déflection $V(x_0,t)$.

Pour mesurer des vitesses, on peut utiliser un capteur électromagnétique mesurant la variation d'impédance due au déplacement relatif du matériau "cible", par rapport au solénoïde du capteur (N.B. la norme GOST 16483.31 spécifie l'emploi d'un capteur de ce type).

Pour chacun de ces types de capteur, il est nécessaire que la position du point soit concrétisée par un élément metallique (de nature quelconque dans le premier cas, ferro-magnétique dans le second), ce qui dans le cas du bois se traduirait pas une surcharge localisée en $x_0$.

On peut également utiliser un microphone, de manière à mesurer les variations de pression au voisinage du point $x_0$, l'information recueillie dans ce cas dépend (légèrement) de l'environnement.

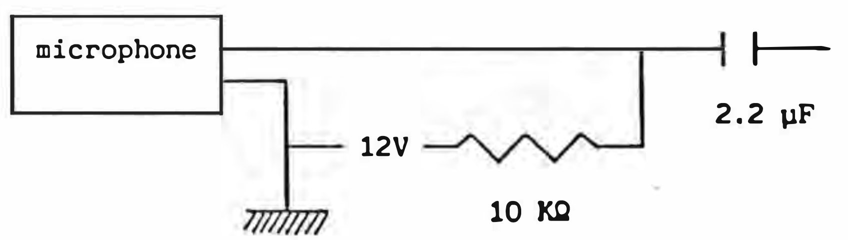
Il est a noter que dans le cas de la mesure des vitesses, l'amplitude du signal fourni par le capteur, dépend notablement de la distance le séparant du point vibrant.

Enfin, on peut rapporter un accéléromètre miniaturisé, au point considéré de l'éprouvette. Néanmoins, la miniaturisation des accéléromètres se traduit par une perte de sensibilité.

*Sur le plan de la facilité de mise en oeuvre et de la flexibilité, un microphone de mesure orienté perpendiculairement à l'axe de la poutre, représente le meilleur choix.*

La fidélité d'un microphone à condensateur omnidirectionnel (i.e. de type *champ libre*), dans l'ensemble de la plage des fréquences audibles, permet d'envisager l'étude de spectre s'étendant jusqu'à 20 KHz ( exemple : microphone B&K 4165 + préamplificateur B&K 2639).

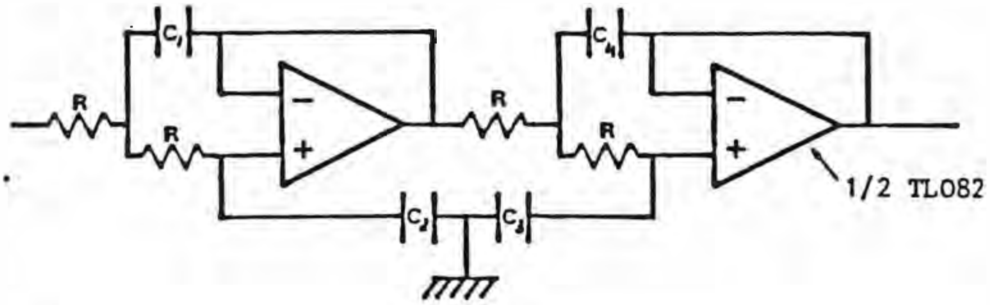
Pour les spectres d'étendue courante (typiquement $F_S$ = 5 KHz), un simple microphone à électret peut être utilisé (encadré 2). En effet, bien que sa bande passante soit réduite par rapport à celle d'un microphone à condensateur "classique", il possède une sensibilité équivalente (quelques mV/Pa), pour un prix de revient très faible.




2 : schéma de montage d'un microphone à électret (type 2 broches)

b) Le signal doit ensuite être amplifié (exemple: amplificateur de mesure B&K 2609) et filtré. Le filtre doit éviter le phénomène de repliement. En particulier la caractéristique d'atténuation du filtre au voisinage de la fréquence nominale de coupure ($\frac{1}{2}F_E$), exprimée en dB/octave, doit être la plus élevée possible.

Pour la présente étude, prenant d'autre part la précaution de limiter l'étendue du spectre à $F_S = 40\%.F_E$, nous avons utilisé des filtres anti-repliement ayant une caractéristique commune de 24 dB/octave, (encadré 3).




3 : schéma du filtre actif passe-bas (type Butterworth, 24 dB/octave)

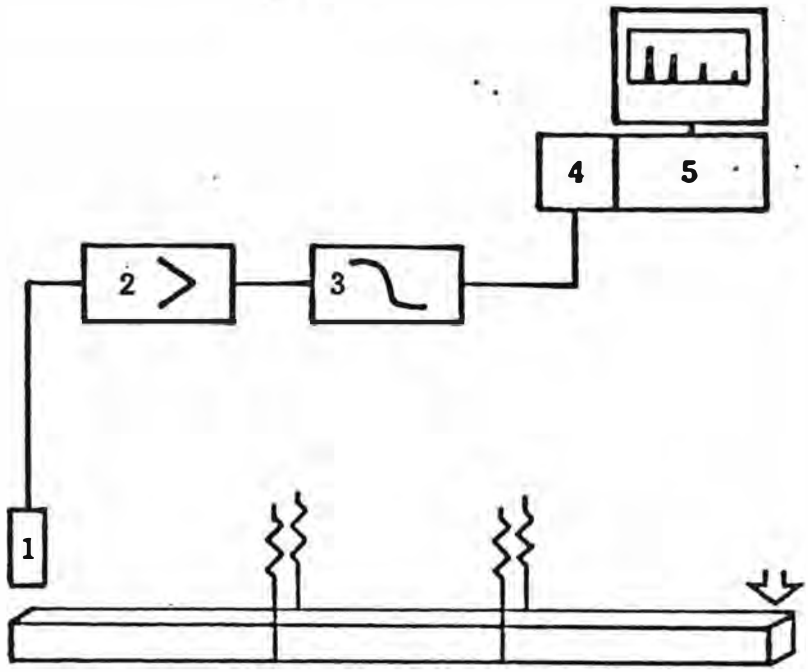
En ce qui concerne l'enregistrement du signal, la précision du convertisseur analogique-numérique, c'est-à-dire le nombre de bits significatifs des nombres entiers résultants de la conversion, a un effet sur les composantes de faible amplitude. Ceci se traduit par la notion de gamme dynamique (un convertisseur 12 bits situe la gamme dynamique à environ 72 dB).

c) Les analyseurs de spectre actuellement commercialisés, ne permettent à l'opérateur d'améliorer la résolution de la FFT qu'à condition de réduire l'intervalle $[0\ ,\ F_S]$. Mis à part les matériels permettant d'effectuer un "zoom" sur n'importe quel sous-intervalle, il n'est pas possible de moduler le nombre N de points représentatifs du signal.

Le plus souvent N = 1024, ce qui correspond à une résolution de plusieurs Hertz. Disposer d'un nombre de points constants présente un avantage certain du point de vue du constructeur car la FFT est exécutée par un unique composant intégré, autrement dit elle est extrêmement rapide.

L'utilisation d'un langage évolué pour effectuer une transformée de Fourier discrète, oblige à gérer des tableaux de nombres entiers et réels (chargement, représentations graphiques, permutation des indices, FFT) et donc à accepter une vitesse d'exécution plus lente, mais donne une grande liberté d'action sur la finesse de résolution.

La configuration retenue comporte un micro-ordinateur compatible PC-XT (GOUPIL G5 S86), dont les performances sont considérablement accrues par un coprocesseur arithmétique. L'acquisition et la configuration des signaux analogiques est effectuée par une carte d'extension (DASH16F), gérée au moyen d'un utilitaire à paramètres multiples fourni par le constructeur (METRABYTE CORP.). Le langage utilisé est QuickBASIC V4.0 (Microsoft).




REPRESENTATION SCHEMATIQUE DU DISPOSITIF

1 : microphone de mesure
2 : amplificateur
3 : filtre antirepliement
4 : carte d'acquisition
5 : micro-ordinateur

(N.B. la carte DASH16F permet d'échantillonner 16 entrées analogiques, cependant dans la présente application, une seule entrée est scrutée, la fréquence d'échantillonnage peut dans ce cas atteindre 100 KHz).

IV.3.2 *Programme d'application* (description)

Le programme se déroule linéairement. On peut distinguer quatre procédures principales :

- *procédure d'initialisation*

Après une page de rappels techniques, le menu principal autorise l'opérateur à modifier la largeur du spectre (5 KHz par défaut), le nombre de points de l'échantillon (2048 par défaut), le mode de sollicitation (flexion par défaut).
Une option de ce menu l'invite enfin à entrer au clavier la masse et les caractéristiques géométriques de l'éprouvette.
La procédure s'achève par le chargement des coefficients utiles à partir de fichiers binaires situés sur disque, dans le même répertoire que la version exécutable du programme.

L'opérateur est alors invité à provoquer une excitation des vibrations naturelles de l'éprouvette (percussion d'une extrémité).

- *procédure d'acquisition*

Une seule voie d'entrée analogique (en l'occurence, il s'agit du signal proportionnel à la pression perçué par le microphone) est scrutée, l'enregistrement est automatiquement déclenché lorsque la tension d'entrée franchit la valeur de 2,5 Volts.
L'acquisition s'arrête lorsque un nombre N - majoré arbitrairement de 256 -points sont disponibles. Une temporisation est alors nécessaire à la numérisation et au transfert des données en mémoire vive (par DMA = Direct Memory Access). Ce n'est qu'après avoir été placées dans un tableau de nombre entiers gérable par QuickBASIC, que ces données font l'objet d'un test de "saturation", sur les 256 premières d'entre elles (overload <=> tension d'entrée $\geq$ 10 Volts en valeur absolue).
La procédure s'achève par la représentation sous forme graphique à l'écran, des $N = 2^M$ points représentatifs de la réponse transitoire de l'éprouvette à l'excitation impulsionnelle.

- *procédure FFT*

Les deux premières des M phases de calcul FFT peuvent être exécutées sans qu'apparaissent les fonctions trigonométriques. Celles-ci ne prennent en effet d'autres valeurs que 0 et $\pm$ 1.
La permutation d'indices a naturellement lieu au cours de la première phase, simultanément à la conversion en nombres réels des valeurs du signal échantillonné (cf. encadré 1).
Le spectre du signal est visualisé sous forme graphique à l'écran. Il s'agit, par analogie au cas des fonctions analytiques, de la courbe représentative de la variation du module de la DFT en fonction de la fréquence (spectre de puissance). La procédure exécute enfin une recherche des 10 pics "principaux" du spectre.
Le temps d'exécution de la procédure est de l'ordre de 4 secondes pour N = 2048 points et de 12 secondes pour N = 4096 points.

L'opérateur est alors invité à attribuer un rang d'harmonique à certains de ces pics qui lui sont présentés par ordre d'amplitude décroissante.
Il est demandé à l'opérateur de limiter la selection aux rangs inférieurs ou égaux à 5. Cette opération suppose une bonne compréhension du principe de l'essai, de manière à écarter d'éventuels parasites. Lorsqu'un grand nombre (>5) de fréquences propres apparaissent dans la fenêtre expérimentale, il est recommandé de diminuer $F_S$ (en retournant au menu principal) de manière à améliorer la résolution.

- *procédure d'interprétation*

Si au moins deux pics ont été affectés d'un rang d'harmonique par l'opérateur, les deux inconnues dont dépendent les fréquences propres sont déterminées par la méthode des moindres carrés appliquée à la formule d'approximation linéaire présentée en III.5.

N.B. les modules apparents correspondant à chacune des fréquences désignées sont également calculées et présentées à l'opérateur. Il y a toujours lieu de vérifier que le module apparent décroît quand la fréquence (i.e. le rang de l'harmonique ) augmente. Si tel n'est pas le cas l'opérateur doit reprendre la sélection (ou l'essai 1).

## V. EXEMPLES D'APPLICATION

La première application est une illustration de l'évolution des modules apparents des premiers rangs, lorsqu'on réduit la longueur d'une poutre donnée de manière à augmenter les fréquences des modes propres.

La démarche que conclue la régression linéaire semble s'appliquer à une large gamme d'élancements ; il est donc naturel d'en chercher une confirmation expérimentale en prenant une poutre et en réduisant son élancement. Si les propriétés de la poutre sont homogènes, on s'attend à trouver des modules dynamiques indépendants de l'élancement.

En principe la valeur du module dynamique ne doit pas dépendre du type de sollicitation. Cette considération est un recoupement de deux hypothèses dont il est difficile de connaître les limites de validité : l'hypothèse d'homogénéité d'une part et l'hypothèse du comportement élastique d'autre part. Cette dernière implique notamment l'indépendance entre modules dynamiques et fréquence : lorsqu'elle n'est pas raisonnablement vérifiée pour un matériau, les résultats de l'essai peuvent être erronés (le cas s'est présenté lors d'une étude sur des éprouvettes attaquées par des champignons).

### V.1 Etude de l'effet d'élancement

Il s'agit en premier lieu de mettre en évidence la validité du modèle de Timoshenko aux cas d'éprouvettes en bois de droit fil dont on veut connaître le module d'élasticité.

Le même essai a été réalisé plusieurs fois sur chaque poutre-éprouvette, en réduisant progressivement leur longueur. Pour un rang donné et pour chaque nouvelle longueur, on trouve de nouvelles valeurs des fréquences propres, de plus en plus élevées.

Lors d'un essai l'opérateur choisit les modes propres qui participent au calcul du module dynamique. Les modules apparents correspondant à ces modes propres sont calculés systématiquement suivant leurs rangs, l'essai n'est accepté qu'à la condition que ces modules apparents diminuent en regard des rangs croissants.

#### V.1.1 *Effet de la fréquence sur les modules apparents*

La figure 4 rassemble les résultats expérimentaux obtenus en réduisant l'élancement d'une éprouvette de section constante, découpée sur quartier et excitée suivant la direction tangentielle du bois.

On peut constater que plus les fréquences propres augmentent, plus les modules apparents qui en sont déduits sous-estiment le module dynamique (dont la valeur probable est représentée en traits pointillés).

Cette figure peut être comparée à la figure 1, qui trouve donc ici une confirmation expérimentale (cf.III.3.2), c'est pourquoi les modules apparents *spécifiques* ont été représentés en ordonnées.

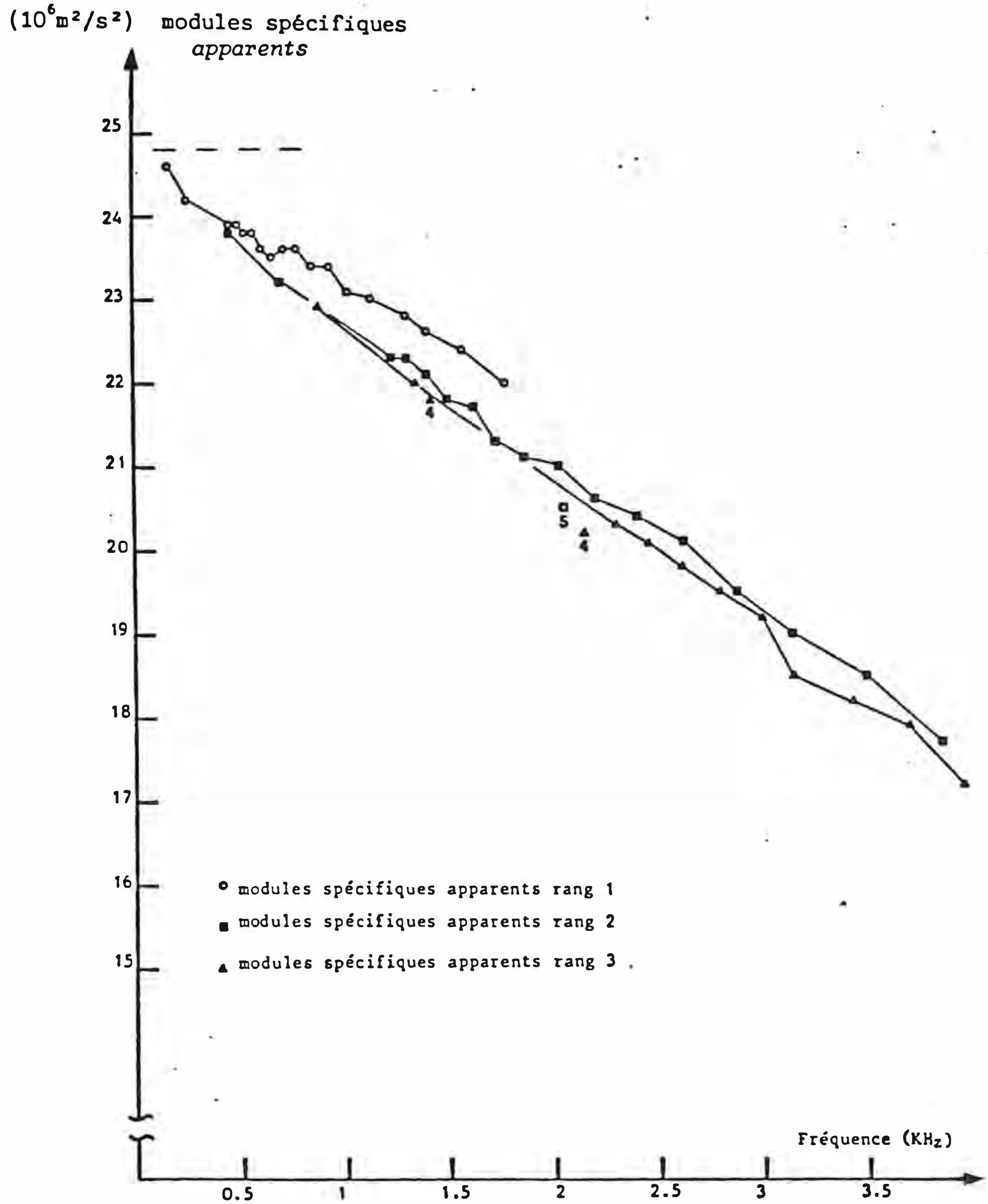



figure 4 : Relation entre module apparent et fréquence propre

essence : Jaboty ( Erisma uncinatum )
origine : Guyane Française

échantillon : dimensions initiales : h = 12,1 mm ; b = 29,9 mm ; l = 60,5 cm
conditions de stabilisation : 24 °C ; 65% HR
masse volumique : 515 Kg/$m^3$ ( N.B. faible pour l'essence )

V.1.2 *Effet de l'élancement sur le module dynamique en flexion*

Les figures 5a,5b et 5c rassemblent les résultats expérimentaux obtenus en réduisant l'élancement d'éprouvettes de sections rectangulaires constantes, découpées sur quartier et excitées suivant la direction tangentielle du bois.

Le mode de représentation diffère quelque peu de celui de la figure 2 (cf. III.3.2) mais la concordance est réelle.

Les trois échantillons utilisés ont des masses volumiques trés différentes, leur point commun étant toutefois leur grande homogénéité, sans doute due aux conditions de croissance dans la forêt sempervirente de Guyane Française.

Lorsque l'élancement est grand ( > 45 ), 5 fréquences propres peuvent être identifiées dans la fenêtre expérimentale préconisée ([ 0, 5 KHz]). Ce nombre diminue progressivement et l'étude s'achève lorsque la fréquence propre de rang 2 devient inaccessible (cf. III.5.2 ; en l'occurence, même en augmentant la largeur du spectre, cette deuxième fréquence est alors très difficile à mettre en évidence).

Le module d'Young dynamique, tel qu'il est obtenu par utilisation de l'approximation linéaire et la méthode des moindres carrés est représenté en trait plein sur les figures : il apparaît remarquablement constant dans la plage d'élancements considérée, ce qui amène à le considérer comme indépendant de la fréquence, si celle-ci varie d'une centaine de Hz à environ 5 KHz.

V.1.3 *Comparaison vibrations de flexion et vibrations axiales*

Pour établir la figure 6, la même procédure a été suivie, mais s'agissant d'une éprouvette de section carrée constante, nous avons la possibilité de suivre les résultats obtenus suivant les divers cas de sollicitation, lorsque l'élancement diminue.

Pour cet échantillon, bien qu'à l'élancement initial, la fenêtre expérimentale contenait les fréquences propres des trois premiers rangs en vibrations transversales, seuls les rangs 1 et 2 ont été pris en compte pour le calcul, ce qui fixe les deux inconnues sans faire appel à la procédure des moindres carrés. En vibrations axiales, il s'agit du module obtenu par la relation biunivoque classique (cf. II.3).

On peut souligner la stabilité des résultats concernant les modules dynamiques en sollicitation axiale (suivant L), ou en flexion (dans les plans RL et TL), ceci en les observant séparément. Cependant, alors que les modules déterminés suivant L ou en flexion TL sont sensiblement égaux, il apparaît que le module en flexion RL est plus faible que les autres, ce qui ne devrait pas être dans un matériau homogène. Cette différence est peut-être due au parenchyme axial, qui apparaît à la loupe associé aux pores pourtant peu nombreux, mais qui, dans l'échantillon testé (wacapou), est souvent anastomosé entre pores voisins suivant une direction quasi-tangentielle.

Néanmoins, on peut admettre que le module d'Young dynamique est pratiquement indépendant de la fréquence alors que le ratio E/KG varie lorsque l'élancement diminue, dans des proportions bien supérieures à l'incertitude inhérente à la méthode de dépouillement utilisée (cf.III.5.3 ; tab.10).

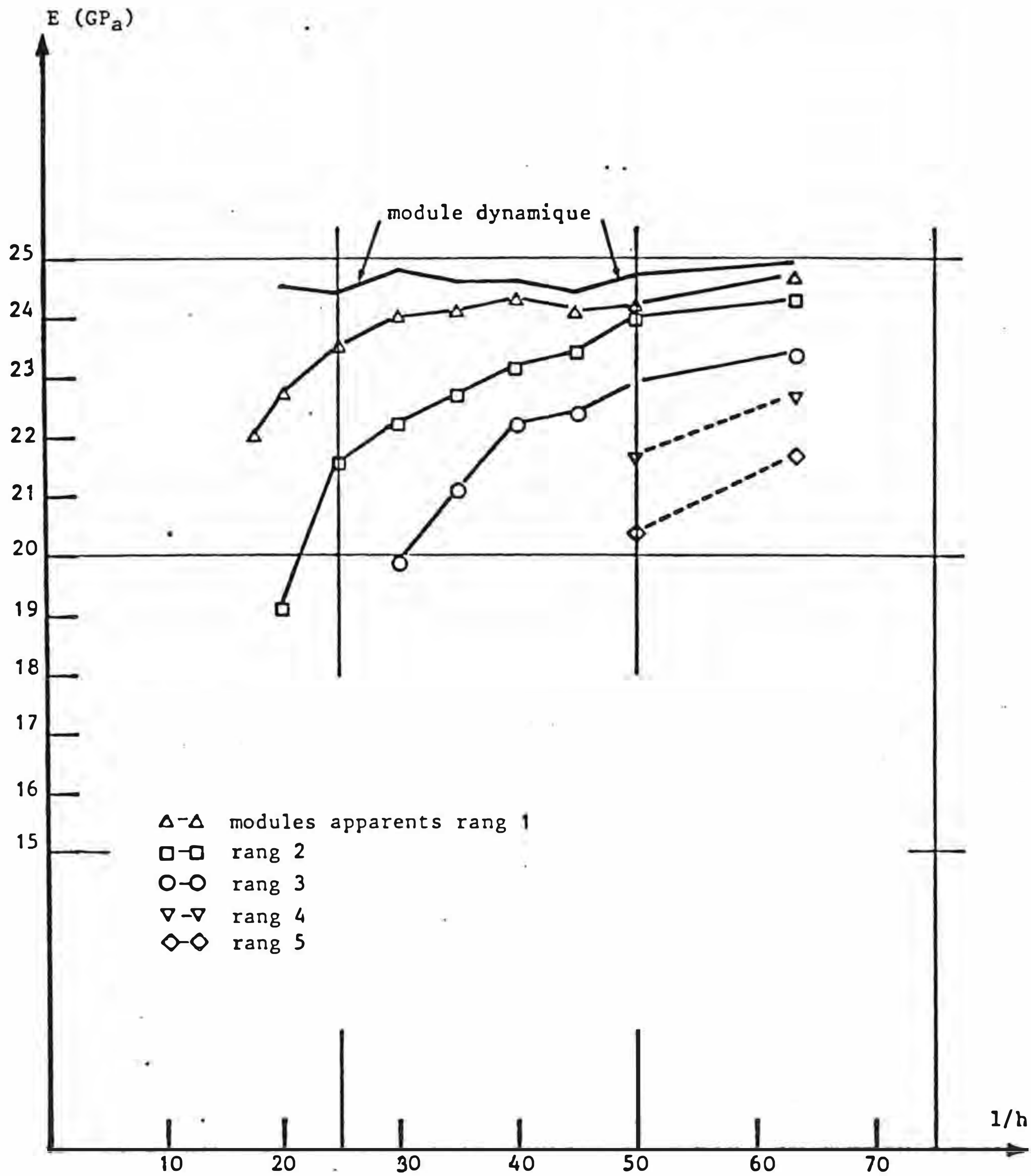



figure 5a : Relation entre module dynamique et <u>élancement</u>

essence : Wacapou (Vouacapoua americana )
origine : Guyane Française

échantillon : dimensions initiales : h = 10,0 mm ; b = 30,0 mm ; l = 62,5 cm
conditions de stabilisation : 24 °C ; 65% HR
masse volumique : 950 $Kg/m^3$

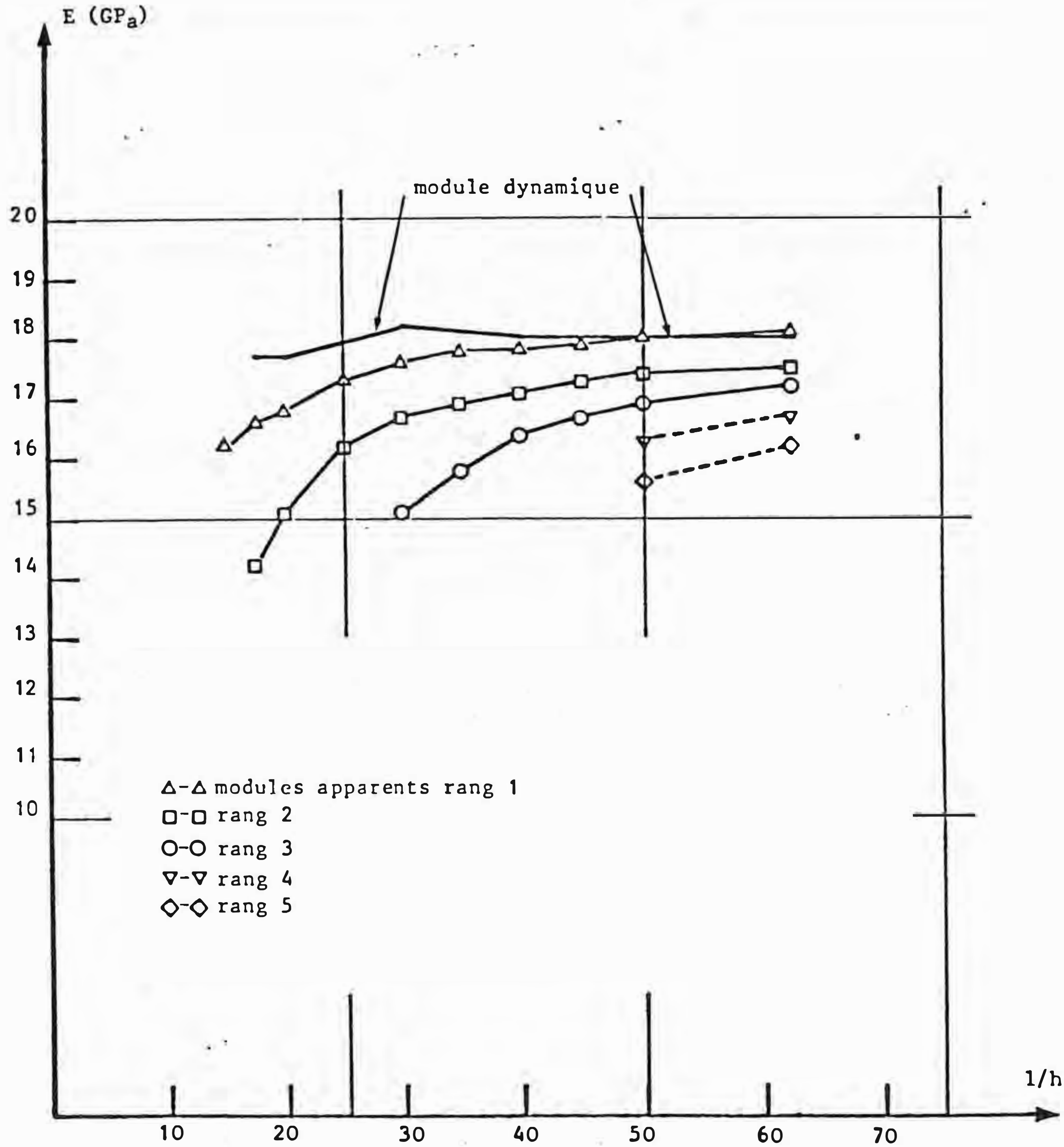



**figure 5b** : Relation entre module dynamique et <u>élancement</u>

essence : Angélique ( Dicorynia guianensis )
origine : Guyane Française

échantillon : dimensions initiales : h = 9,95 mm ; b = 29,8 mm ; l = 62,5 cm
conditions de stabilisation : 24 °C ; 65% HR
masse volumique : 770 Kg/m$^3$

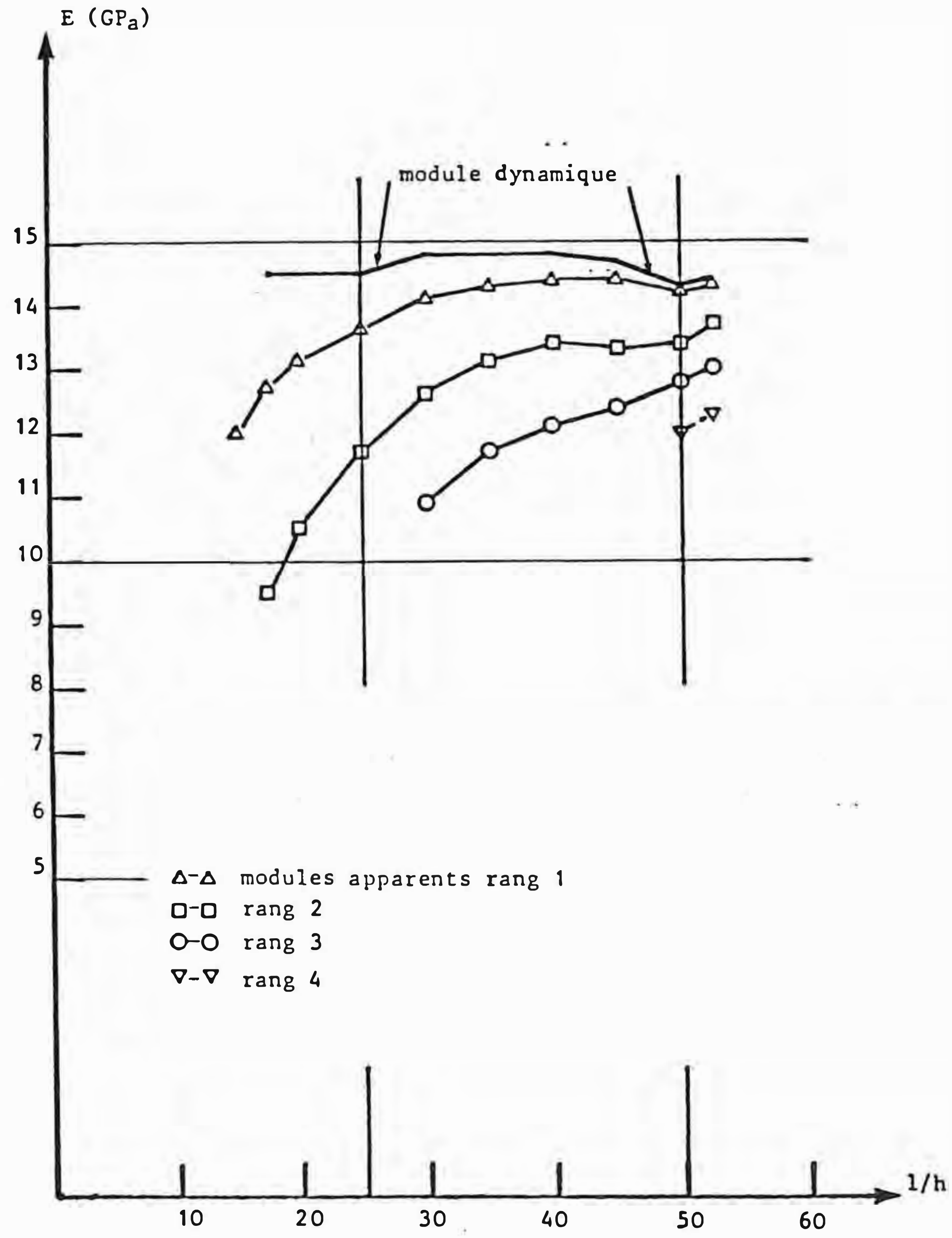



**figure 5c : Relation entre module dynamique et élancement**

essence : Parapara ( Jacaranda copaia )
origine : Guyane Française

échantillon : dimensions initiales : h = 12,0 mm ; b = 29,8 mm ; l = 62,5 cm
conditions de stabilisation : 24 °C ; 65% HR
masse volumique : 430 Kg/m$^3$

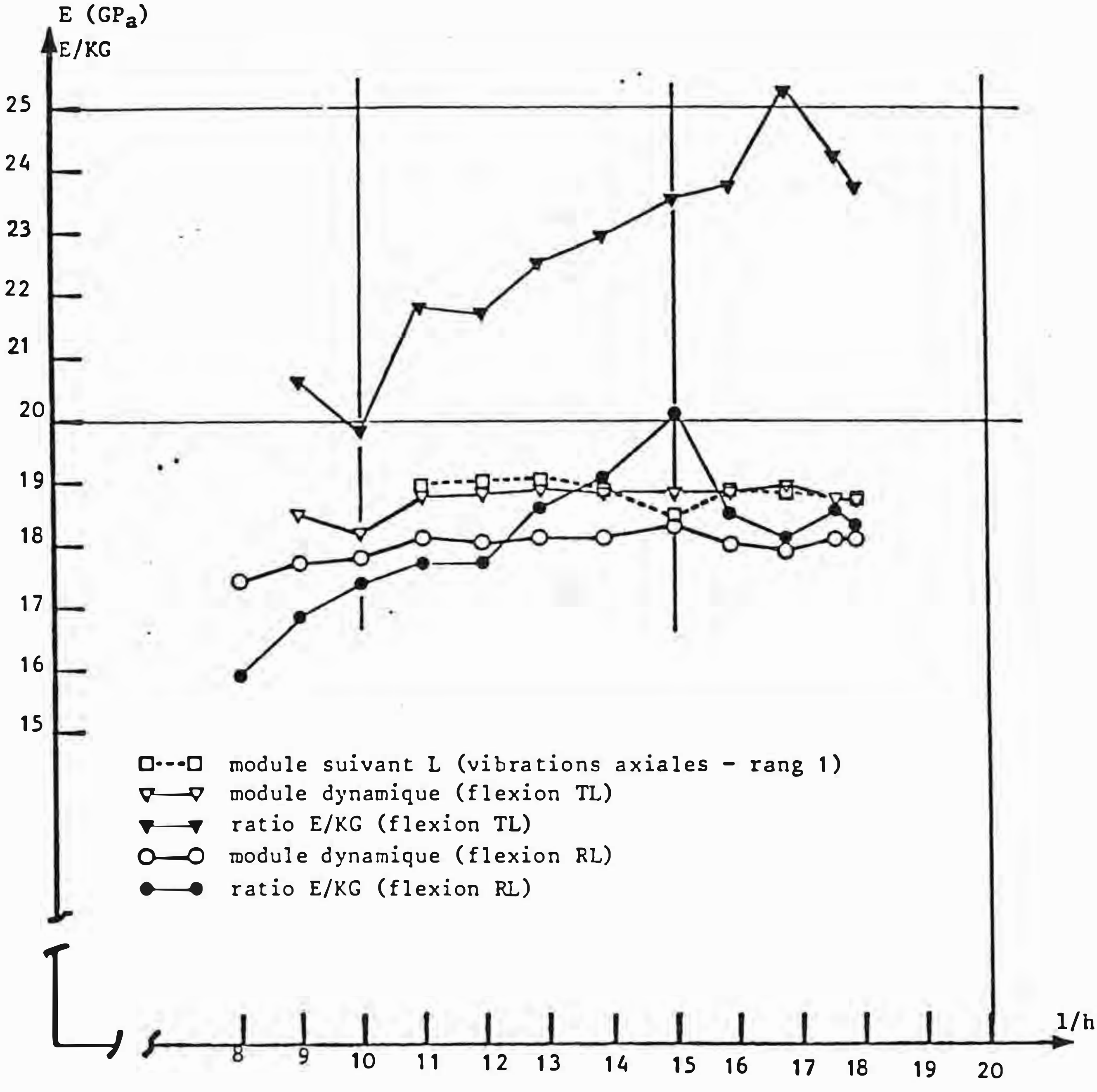



**figure 6** : Relations entre modules dynamiques et <u>élancement</u>
Relations entre ratios E/KG et <u>élancement</u>

essence : Wacapou (Vouacapoua americana)
origine : Guyane Française

échantillon : dimensions initiales : h = 20,0 mm ; b = 20,0 mm ; l = 36 cm
conditions de stabilisation : 24 °C ; 65% HR
masse volumique : 840 Kg/m³

## V.2. Etude du module d'Young : cas d'un groupe d'éprouvettes

Au vu des résultats obtenus en modifiant la longueur de diverses éprouvettes sans défaut, nous admettons que pour les élancements usuels, la détermination du module dynamique d'après le spectre des vibrations de flexion d'une éprouvette parallélépipédique axée suivant la direction longitudinale du bois, est fiable (d'autant plus qu'elle est parfaitement reproductible).

Cependant, le module dynamique (toujours selon L) peut, semble-t-il, dépendre du choix de la direction de sollicitation (cf. V.1.3), ce qui serait en contradiction avec nos hypothèses.

Dans la pratique, la variabilité du module d'élasticité du matériau bois est telle que l'on cherche à en évaluer la valeur moyenne, après avoir effectué la mesure sur un échantillon comprenant un grand nombre d'individus.

Les sources potentielles de variabilité au sein d'un même groupe d'éprouvettes sont en effet nombreuses : différences entre espèces (ultrastructure), entre provenances ou entre arbres (génétiques et "stationnelles"), d'un point à l'autre d'un même arbre (orientation, masse volumique, bois juvénile/adulte).

Les figures 7,8 et 9, ont été établies d'après les résultats d'essais effectués sur un ensemble de 22 éprouvettes extraites d'un unique épicéa de la forêt vosgienne. Ces éprouvettes, de section rectangulaire (10 mm suivant T et 25 mm suivant R), étant réservées à une autre campagne d'investigation, nous n'avons pas effectué de réduction de leur longueur nominale (55 cm).

Chaque éprouvette a été sollicitée successivement suivant les différentes directions privilégiées de leur structure anatomique, nous avons ainsi pu établir huit valeurs pour le module d'élasticité suivant L, en lui appliquant successivement :

- Un essai de flexion quasi-statique avec effort appliqué suivant R, qui a permis de déterminer le *module statique Esr.*

- Deux essais de vibrations de flexion, dans les plans RL et TL, qui ont permis de déterminer *les deux modules dynamiques Edr et Edt*, ainsi que *quatre modules apparents Er1, Et1* (premier rang), *Er2 et Et2* (second rang).

- Un essai de vibrations axiales, qui nous a donné un troisième *module dynamique Edl.*

Pour comparer les résultats obtenus sur cet ensemble d'éprouvettes, nous avons reporté sur les figure 7 à 9, les droites de régressions associées aux nuages représentés et effectué les tests d'hypothèse :

H1 : la pente de la droite de régression égale 0 .
Ce test est équivalent au test sur le *coefficient de détermination* $R^2$ (Tomassone et al. [69]).
L'hypothèse H1 est toujours rejetée au risque de 1%.

$H1^{BIS}$ : la constante de la droite de régression égale 0 .
$H1^{BIS}$ peut le plus souvent être acceptée.

La théorie indique en effet que, si toutes les éprouvettes du groupe étaient homogènes et si elles partageaient les mêmes modules en cisaillement (dans les plans RL et TL), les différents modules seraient au pire proportionnels, au mieux égaux deux à deux.

Ce qui amène à tester également l'hypothèse :

H2 : la pente de la droite de régression égale 1 .
L'hypothèse H2 n'est rejetée, au risque de 1% , que dans certains cas de comparaisons entre modules apparents et modules dynamiques.
Le manque de "puissance" de H2 conduit cependant à poser l'hypothèse de comparaison des moyennes :

H3 : les moyennes sont égales, autrement dit, la différence entre les deux estimations de la même grandeur a une moyenne qui égale 0 (test t pour "échantillons appariés", Cailliez [9]).
Cette hypothèse n'est acceptée, au risque de 1% , que dans le seul cas de la comparaison des moyennes de Edr et Edt.

V.2.1 *Flexion dans le plan RL* (fig. 7)

La figure 7 illustre les différences entre les évaluations du module d'élasticité, lorsqu'on soumet l'ensemble d'éprouvettes à des sollicitations de flexion dans le plan RL, qui est le plus défavorable tant en raison de l'hétérogénéité due à la succession de bois de printemps et de bois d'été, qu'en raison de l'élancement.

a) *Module dynamique Edr, modules apparents Er1, Er2* :

La valeur moyenne du module dynamique (en abscisses) est 16.8 GPa.

En raison de l'élancement modéré des éprouvettes (l/h = 22) dans le cas des vibrations de flexion dans le plan RL, seules les fréquences des deux premiers modes ont été identifiées et exploitées pour la détermination du module dynamique Edr .

Le module apparent Er1, déduit de la fréquence propre de premier rang, a pour valeur moyenne 15.6 GPa . Le module apparent Er2, déduit de la fréquence propre de second rang, a pour valeur moyenne 13.2 GPa .

b) *Module statique Esr* :

Un chargement de flexion 4 points exercé de façon quasi-statique à l'aide d'une machine d'essai hydraulique, a permis d'établir un module Esr d'élasticité suivant la direction du fil, à partir de la mesure simultanée de l'effort appliqué et de la courbure de la poutre dans la partie centrale (1 tiers de la longueur), soumise à un moment uniforme.

La valeur moyenne de Esr est 16.2 GPa ; elle est significativement (au risque de 1%) différente de la valeur moyenne de Edr. A défaut d'être espéré, ce résultat était prévisible en raison du comportement différé du bois. En effet, d'une manière générale plus la vitesse de chargement est grande, plus un matériau paraît rigide, bien que certaines fréquences soient susceptibles d'"activer" un mécanisme visco-élastique (ce qui mettrait en défaut les hypothèses de calcul).

c) Les droites de régression de la figure 7.

$Esr = 0.88^{**}Edr + 1.33$ : on pourrait considérer que Esr est inférieur à Edr tout en lui étant lié de façon significative par une relation de proportionnalité (la pente à considérer pour l'ajustement serait alors le rapport des valeurs moyennes, c'est-à-dire env. 96%).

$Er1 = 0.88^{**}Edr + 0.77^{*}$ et $Er2 = 0.60^{**}Edr + 3.04^{**}$ : toutes les hypothèses (H1 à H3) sont rejetées, les modules apparents ne peuvent donc pas être considérés comme proportionnels aux modules dynamiques.

En conséquence, nous ne sommes pas, dans cette configuration, en mesure d'évaluer de manière fiable l'écart moyen entre un module apparent et le module dynamique. Il est donc indispensable de passer par la détermination des deux inconnues du comportement pour chaque éprouvette.

V.2.2 *Flexion dans le plan TL*

La figure 8 illustre les différences entre les évaluations du module d'élasticité, lorsqu'on soumet l'ensemble d'éprouvettes à des sollicitations de flexion dans le plan TL et qu'en outre le rapport de la longueur à l'épaisseur des éprouvettes est grand.

a) *Module dynamique Edt, modules apparents Et1, Et2* :

La valeur moyenne de Edt est 16.8 GPa , on note qu'elle est égale à la valeur moyenne de Edr.

L'élancement important des éprouvettes ($l/h = 55$) dans le cas des vibrations de flexion dans le plan TL, permet d'identifier sans difficulté et d'exploiter jusqu'à quatre fréquences propres pour la détermination par la méthode des moindres carrés, du module dynamique Edt (en abscisses). Par comparaison à Edr, les domaines utiles de fréquence se recouvrent, mais seuls les deux premiers rangs sont représentés.

Le module apparent Et1, déduit de la fréquence propre de premier rang, a pour valeur moyenne 16.6 GPa . Le module apparent Et2, déduit de la fréquence propre de second rang, a pour valeur moyenne 16.1 GPa .

b) Les droites de régression de la figure 8.

$Edr = 0.88^{**}Edt + 1.94$ : on pourrait considérer que Esr est lié de façon significative à Edt par une relation de proportionnalité (la pente n'est pas significativement différente de 1 et les moyennes sont égales).

$Et1 = 0.93^{**}Edt + 0.97^{*}$ : ici encore, toutes les hypothèses sont rejetées, les modules apparents de rang 1, ne peuvent donc pas être considérés comme proportionnels aux modules dynamiques.

La "qualité" de l'ajustement $Et2 = 1.00^{**}Edt - 0.64$ , est donc paradoxale.

En conséquence, nous nous garderons également, dans cette configuration pourtant plus favorable que la première, de proposer une évaluation directe de l'écart moyen entre un module apparent et le module dynamique.

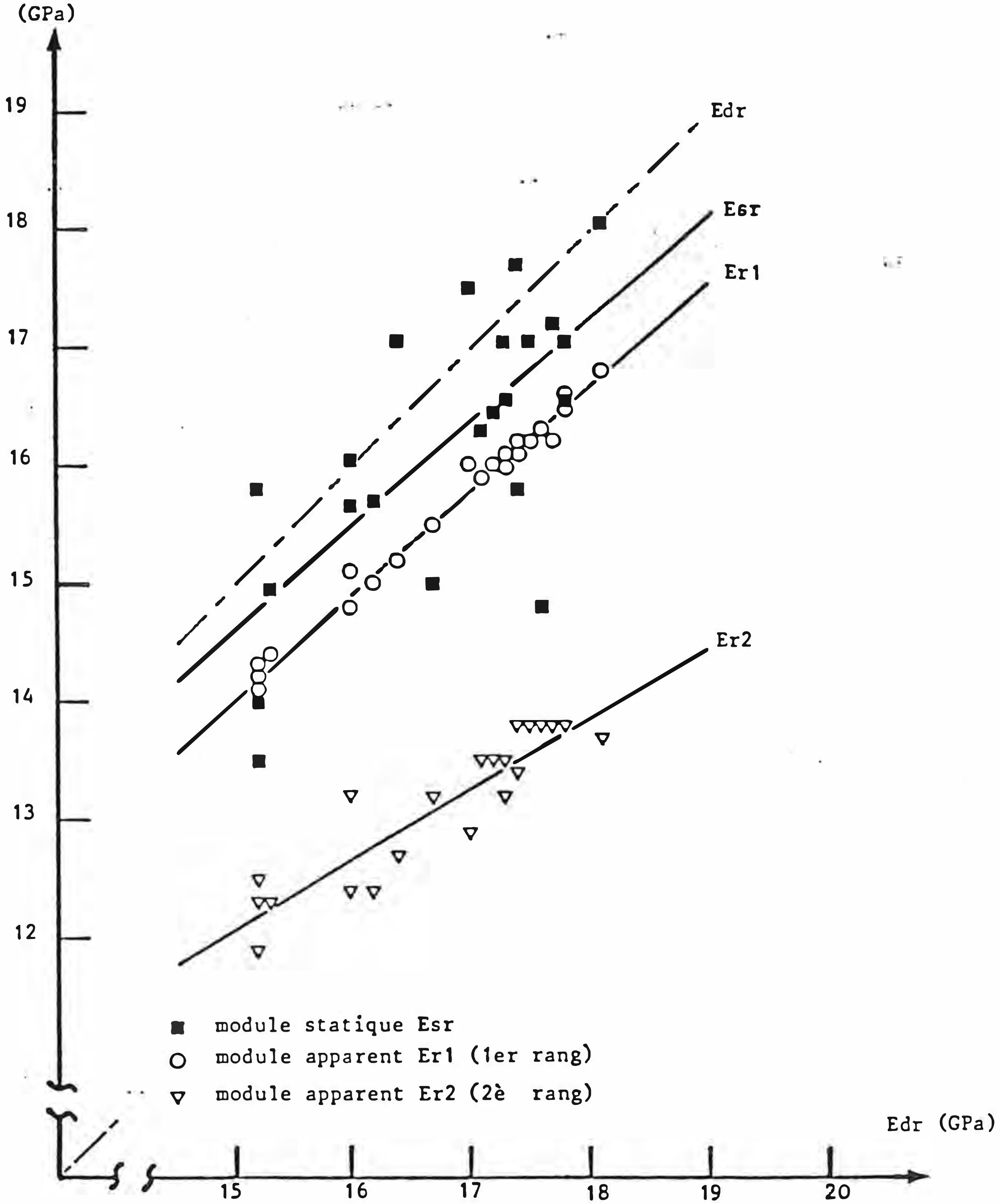



**figure 7** : Relations entre modules apparents Er1, Er2 ( l/h = 22), modules statiques Esr et modules dynamiques Edr (cf. V.2.1)

essence : Epicea commun ( Picea excelsa)
origine : France ( Vosges )

22 échantillons : dimensions nominales : h = 25 mm ; b = 10 mm ; l = 55 cm
conditions de stabilisation : 24°C et 80% HR
masse volumique moyenne : 537 Kg/m³ ( e.t. = 19 ).

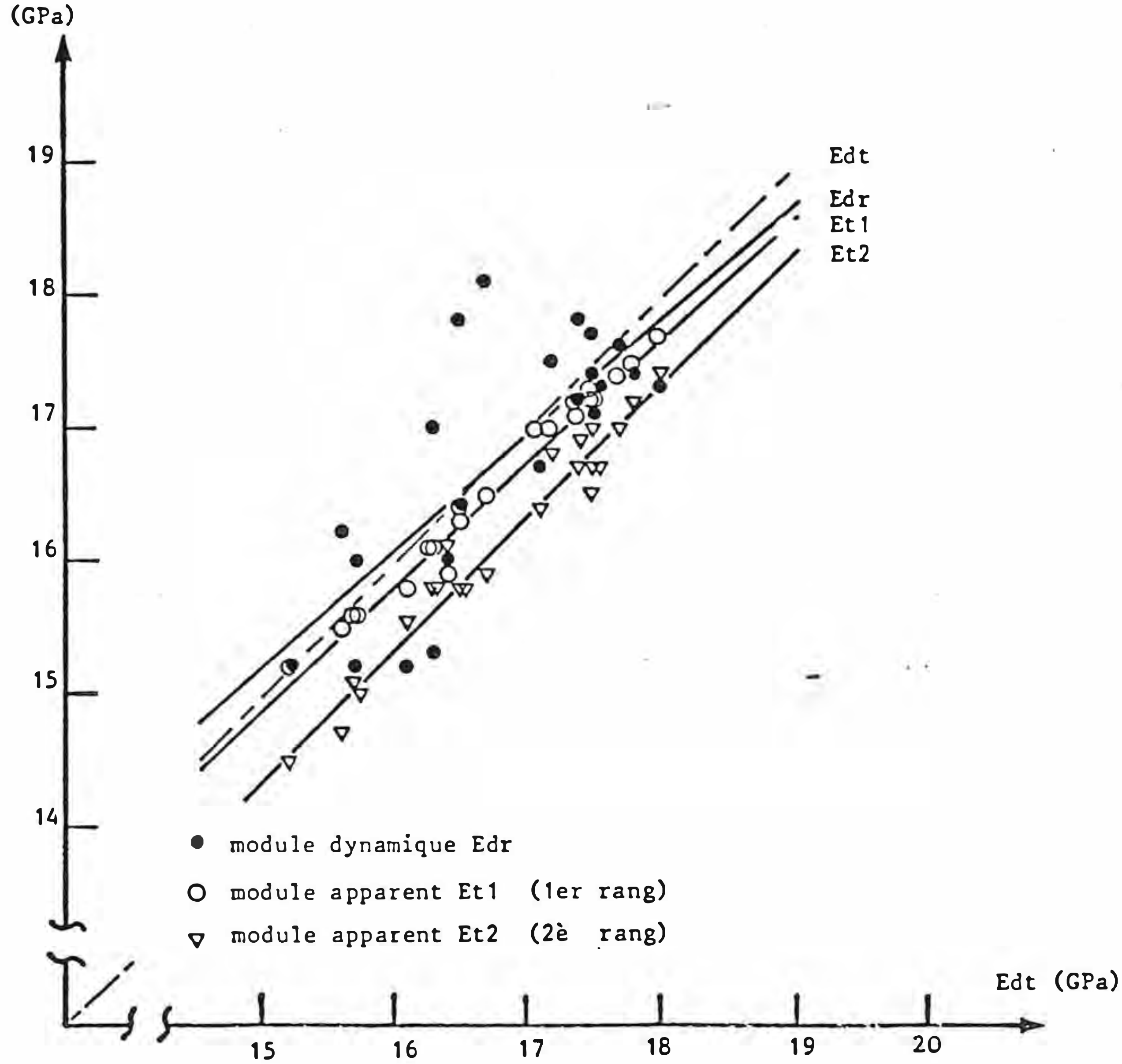



figure 8 : Relations entre modules apparents Et1, Et2 (l/h = 55), modules dynamiques Edr et modules dynamiques Etr (cf. V2.2)

essence : Epicea commun ( Picea excelsa)
origine : France ( Vosges )

22 échantillons : dimensions nominales : h = 10 mm ; b = 25 mm ; l = 55 cm
conditions de stabilisation : 24°C et 80% HR
masse volumique moyenne : 537 Kg/m$^3$ ( e.t. = 19 ).

### V.2.3 *Vibrations axiales suivant L*

La figure 9 illustre les différences entre les évaluations du module dynamique, suivant que l'on applique une sollicitation axiale, ou l'une ou l'autre des sollicitations de flexion (lesquelles conduisent, on l'a vu, à la même valeur moyenne).

a) *Module dynamique Edl* :

Dans la fenêtre expérimentale, une seule fréquence propre de vibrations axiales a été identifiée et exploitée pour la détermination du module dynamique Edl (en abscisses). L'élancement des éprouvettes est suffisant pour appliquer la méthode d'exploitation présentée en (II).

La valeur moyenne de Edl est 17.5 GPa : elle est significativement (au risque de 1%) différente de la valeur moyenne de Edr (et Edt). Ici encore, on peut suggérer que cette différence est due au comportement différé du bois, car la fréquence propre qui fixe la valeur de Edl est supérieure à celles utilisées pour calculer Edr et Edt.

Toutefois on ne peut donner un caractère général à cette explication, car lors des expériences décrites notamment en V.1.3 , la croissance des fréquences propres, consécutive aux réductions de longueur d'une éprouvette donnée, ne nous a pas apporté d'éléments concordants.

b) Les droites de régression de la figure 9.

Edr = 0.84**Edl + 2.01 et Edt = 0.96**Edl + 0.03 : on pourrait considérer que Edl est supérieur à Edr et Edt, tout en leur étant lié de façon significative par une relation de proportionnalité (la pente à considérer pour l'ajustement serait alors le rapport des valeurs moyennes, c'est-à-dire env. 105%).

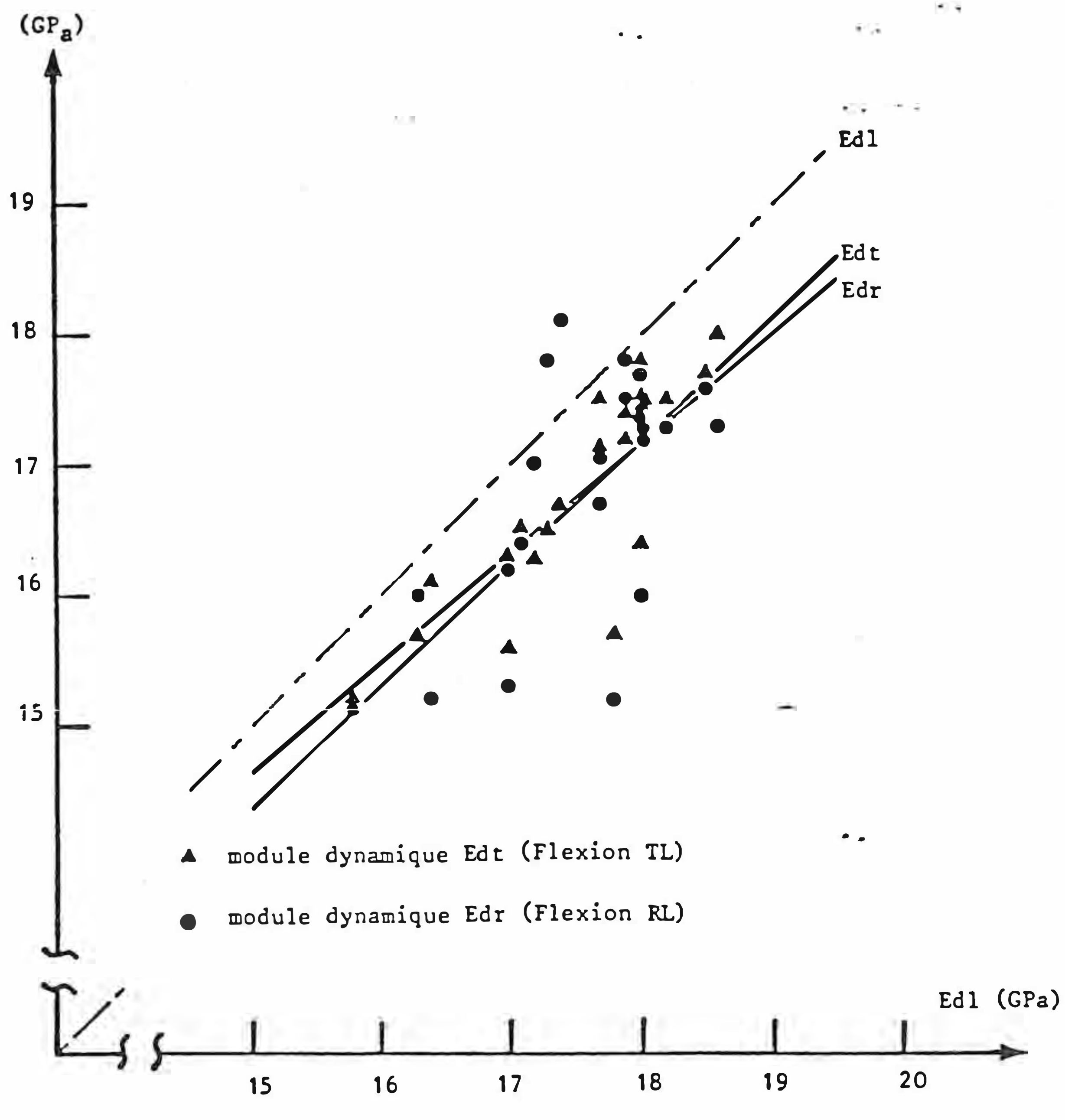



**figure 9 : Relations entre modules dynamiques en flexion Edr et Edt et modules dynamiques en vibrations axiales Edl**

essence : Epicea commun ( Picea excelsa)
origine : France ( Vosges )

22 échantillons : dimensions nominales : A = 25x10 mm² ; l = 55 cm
conditions de stabilisation : 24°C et 80% HR
masse volumique moyenne : 537 Kg/m³ ( e.t. = 19 ).

## V.3 BILAN

En flexion dynamique, les fréquences propres des éprouvettes en bois dont l'axe correspond à la direction des fibres dépendent de plusieurs termes de la matrice des complaisances.

a) La principale application de la procédure d'essai présentée en IV est la détermination du module d'Young dynamique suivant la direction des fibres sur des éprouvettes normalisées (parallélépipèdiques et sans défaut).

Cependant, malgré la référence que représente la norme GOST 16483.31, il faut rester prudent en ce qui concerne le module de cisaillement qu'elle permet d'estimer simultanément.

b) Elle peut être appliquée au préalable sur un échantillon destiné à une autre expérimentation, sans risque d'endommagement (par exemple : éprouvettes de section carrées préconisées par les Normes Françaises pour les essais de flexion statique ou de détermination de la résilience).

Classiquement, on préconise pour les essais de vibrations, l'emploi d'éprouvettes très longues pour que les fréquences axiales ne soient pas trop élevées ou très minces pour que les modules apparents en flexion aient des valeurs très proches les unes des autres. On sait désormais, que l'on peut interpréter les fréquences des mouvements propres de vibration en flexion même pour des élancements faibles.

c) Elle permet d'envisager l'utilisation de la distribution des modules dynamiques dans un ensemble d'éprouvettes, comme critère de définition d'une partition en sous-ensembles, dans la perspective d'étudier d'autres phénomènes. Prenons pour exemples :

- la prévision de la flèche quasi-instantanée d'une structure soumise à un chargement statique : les modules dynamiques permettent d'évaluer par anticipation la déformation prise pendant les premières fractions de seconde ( <=> fréquences 100 à 1000 Hz)

- l'étude de l'évolution des performances du bois placé dans des conditions hygrométriques fluctuantes (effets de la température et de l'humidité ou de leurs variations).

d) La procédure d'essai, qui met en oeuvre des matériels de laboratoire polyvalents et relativement bon marché, est d'exécution rapide.

- Le mode opératoire est simple ; la structure linéaire du logiciel permet en outre de l'adapter facilement à d'autres structures (par exemple aux poutres de type "encastrée-libre").

- Le positionnement de l'éprouvette n'exige aucune précaution particulière, les appuis sont faits de simples bracelets élastiques : les mouvements de la poutre par rapport aux bases des supports ont des fréquences très basses qui n'interfèrent pas avec les fréquences propres de la structure seule.

- La sollicitation est non-traumatisante et n'exige pas d'être calibrée

- Le microphone et son amplificateur peuvent être remplacés par un sonomètre (portable). Il peuvent, comme le filtre antirepliement, être réalisés à moindre coût, à l'aide de composants électroniques commercialisés "grand public" (ex : microphone à électret). Le micro-ordinateur et la carte de conversion analogique-numérique sont évidemment d'emploi très large.

e) *On peut l'utiliser pour l'étude d'autres matériaux* :

Pour savoir si le banc d'essai peut convenir à d'autres matériaux, on peut procéder comme en V.1, c'est à dire en réduisant la longueur d'éprouvettes de sections constantes, de manière à vérifier que le résultat de la mesure du module d'Young est bien indépendant de l'élancement.

Nous avons ainsi pratiqué ce "test" sur un barreau d'acier laminé mi-dur de section rectangulaire, d'épaisseur 12 mm et de longueur initiale 60 cm, en réduisant sa longueur, par tronçons de 6 cm, jusqu'à 24 cm.

Les résultats obtenus sont satisfaisants car, les 7 modules spécifiques calculés étant compris entre 25.8 et 26.2, nous avons obtenu 4 fois la valeur 26 ($10^6$ m²/s²) , alors que le module apparent décroissait régulièrement, avec l'élancement, de 26.1 à 25.4 ($10^6$ m²/s²).

Avec le même succès, nous avons pu vérifier que la procédure d'essai s'applique à quelques spécimens de panneaux dérivés du bois (contreplaqué, triply, panneau de particules), en réduisant la longueur de certains échantillons d'une part, et en comparant avec les résultats d'essais quasi-statiques normalisés d'autre part.

f) Il reste des points à approfondir :

- Contrairement au module d'Young E, le ratio E/KG issu du même dépouillement n'est pas indépendant de l'élancement de la poutre.

Les résultats présentés sont malheureusement insuffisants et une investigation complémentaire doit être envisagée, qui porterait sur la dépendance en fréquence du module de cisaillement G. Sans doute faut-il également apporter davantage de précisions sur le facteur de forme (relations avec les complaisances viscoélastiques).

- Dans certaines éprouvettes un phénomène rend la procédure stérile : la vibration manifeste un genre de battement correspondant probablement à des couplages entre différents modes élastodynamiques. Dans le spectre, on trouve alors deux raies d'amplitudes comparables, dans un voisinage étroit de la fréquence propre attendue pour un mode de rang donné. L'opérateur ne doit pas dans cette situation sélectionner l'une des fréquences et lui attribuer un classement.

Ce phénomène apparaît lorsque le bois est contrefilé ou quand l'éprouvette contient des petits noeuds (diamètres de l'ordre du millimètre). Par contre, il n'est pas systématiquement observable quand le fil est incliné (éprouvettes hors axes) ou lorsque les noeuds sont de gros diamètre (de l'ordre du centimètre).

- Dans le cas d'éprouvettes orientées suivant R ou T, d'autres expérimentations doivent encore valider la méthode, le risque majeur étant que l'hypothèse d'élasticité pour le module d'Young soit mise en défaut ...

# AMORTISSEMENT
# DES VIBRATIONS NATURELLES

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on change radicalement de méthode d'excitation, de manière à limiter le spectre des fréquences à celle d'un seul des mouvements propres de la poutre flottante.

Les vibrations forcées d'une structure sont obtenues en exerçant un effort périodique d'amplitude plus ou moins bien connue. Cela devient une méthode d'étude du comportement si l'on est en mesure de faire varier lentement la fréquence de l'excitation.

Lorsqu'on augmente la fréquence d'excitation, on rencontre une suite de fréquences de résonance, que l'on reconnaît aux maxima qu'atteint l'amplitude du mouvement de vibration et que l'on assimile aux fréquences propres de la structure, ce qui se vérifie facilement par l'analyse spectrale des vibrations naturelles engendrées par une percussion. En tant que telles, les fréquences de résonance ne nous apportent donc aucune information.

Cependant, le calcul montre que si le matériau de la poutre est parfaitement élastique, l'amplitude du mouvement tend vers l'infini lorsque la fréquence d'excitation tend vers la fréquence d'un des mouvements propres.

Telle "divergence" n'est pas observée dans le cas des matériaux réels, en raison de mécanismes dissipatifs, que l'on désigne globalement par *frottements intérieurs*, ainsi nommés car il causent la conversion en chaleur d'une partie de l'énergie mécanique de la structure. Ainsi, la puissance du dispositif d'excitation étant finie, l'amplitude du mouvement croît jusqu'à ce qu'un équilibre "thermo-mécanique" soit atteint.

On se propose de déterminer expérimentalement une grandeur caractéristique des frottements intérieurs : le décrément logarithmique d'un mouvement propre des vibrations naturelles.

On fait l'hypothèse que lorsque une poutre flottante est excitée à une fréquence de résonance, son mouvement (i.e. sa déformée) correspond à un mouvement propre de ses vibrations naturelles. Un corollaire en est que lorsque l'excitation cesse d'être entretenue, le mouvement se poursuit à la même fréquence, i.e. il peut être décrit par une sinusoïde amortie.

Une méthode d'analyse numérique spécifique est présentée en I, qui permet de calculer le décrément logarithmique à partir d'un échantillon temporel caractéristique de l'amortissement "naturel", du mouvement d'un point à partir de l'état de résonance.

La méthode expérimentale est présentée en II. Pour procéder à l'excitation et à la mesure, il est nécessaire de rapporter à l'éprouvette des surcharges ponctuelles qui affectent généralement peu ses fréquences propres, que l'on préfère toutefois déterminées au moyen du dispositif présenté au chapitre précédent.

## I AMORTISSEMENT DES VIBRATIONS DANS LES POUTRES FLOTTANTES

Dans le cas d'un corps parfaitement élastique, l'énergie de vibration que la poutre possède à un instant donné, n'est supposée se dissiper qu'au travers de ses frontières :

> par *transfert d'énergie à l'atmosphère*, au voisinage de la poutre (émission sonore); transfert grâce auquel nous avons pu procéder à la détermination des fréquences propres au moyen d'un microphone.

> par *interactions avec les appuis* (frottements), inévitables même si l'on fait tout pour justifier l'appellation de poutre flottante. Pour minimiser ces interactions, il est recommandé de faire coïncider les appuis avec les noeuds de vibration (lorsqu'il y en a).

Dans les corps réels, il y a une troisième cause de dissipation que l'on désigne :

> par *frottements intérieurs*. Contrairement aux métaux usuels dans lesquels ils sont très faibles, dans les polymères ces frottements intérieurs sont les causes prépondérantes de l'amortissement des vibrations.

De ce fait, pour les métaux il est recommandé d'opérer sous atmosphère raréfiée et d'accorder une attention toute particulier aux conditions d'appui. Par contre, lorsqu'on étudie l'amortissement des vibrations dans le bois massif, on pourra opérer à pression atmosphérique normale, dans les conditions hygrométriques qui siéent au maintien de l'équilibre du bois.

### I.1 Les fréquences de résonance d'une poutre flottante

Si nous restons dans le cadre des petites perturbations et du comportement viscoélastique linéaire, la transformation de Carson permet d'écrire l'équation du mouvement de la poutre flottante, dans l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe (homogène à une fréquence), comme si le corps était élastique dans cet espace (en introduisant des modules dont la partie imaginaire peut être non nulle, Mandel [37], Persoz [51]).

Ce *principe de correspondance*, s'applique en particulier au cas des vibrations naturelles des corps viscoélastiques linéaires et on admet qu'il existe une infinité dénombrable de modes propres, correspondant dans ce cas à des mouvements sinusoïdaux exponentiellement amortis.

Le principe doit également s'appliquer en vibrations forcées, lorsque les conditions aux frontières sont "suffisamment régulières", ce qui est le cas lorsque l'on exerce en un point donné de la structure un effort sinusoïdal d'amplitude constante.

On admet ainsi, par analogie avec les structures élastiques, que les fréquences de résonance des structures viscoélastiques linéaires sont identifiables aux fréquences propres de leurs mouvements naturels.

Bien qu'il s'agisse de la clef de voûte du présent chapitre, nous ne nous proposons pas dans le cadre du présent mémoire, de développer ce point.

### I.2 Dissipation d'énergie et décroissance de l'amplitude du mouvement

Nous admettons dans la suite que le mouvement de l'axe de la poutre correspond à un mode propre particulier de ses vibrations naturelles : la fréquence est la même en tous ses points (alors que ceux-ci ne sont pas forcément en phase).

Au cours d'une période, une fraction de l'énergie de vibration de l'ensemble de la structure est transformée en chaleur. Nous admettons que cette fraction est proportionnelle à la quantité d'énergie disponible en début de période, le facteur de proportionnalité étant appelé *coefficient de frottement intérieur*.

On considère, tant que la vibration est entretenue à la fréquence propre $f_p$, que le mouvement du point de la ligne neutre d'abscisse x , s'écrit comme si la poutre était élastique (on entretient la vibration en lui appliquant un effort sinusoïdal, l'expérience montre que si la puissance du dispositif d'excitation est fixée, l'amplitude du mouvement de chaque point atteint une valeur d'équilibre) :

$$V(x,t) = F(x) \,.\, \sin( 2\pi . f_p . t + \phi(x) )$$

Lorsque l'on cesse de fournir de l'énergie à la structure, l'amplitude du mouvement de chaque point diminue et nous supposons que ce mouvement devient:

$$V(x,t) = F(x) \,.\, \exp( - \delta . f_p . t ) \,.\, \sin( 2\pi . f_p . t + \phi(x) )$$

où $\delta$ est indépendant de l'abscisse x (en raison de la linéarité du comportement). Le coefficient (réel et positif) $\delta$ , au même titre que $f_p$ , dépend du système considéré et en particulier du comportement différé du matériau : le nombre complexe $(-\delta + j.2\pi).f_p$ est une racine de l'impédance opérationnelle de la poutre flottante (Persoz [51]).

La diminution relative d'amplitude d'un tel mouvement est constante d'une période à l'autre, sa valeur absolue étant :

$$d = | 1 - \exp( -\delta ) |$$

d est *le décrément logarithmique* de la vibration (produit de la dérivée du logarithme de l'amplitude par la période). Clairement, si $\delta$ est petit devant 1, alors $d \approx \delta$ .

Nous nous proposons d'établir un algorithme d'évaluation de cette grandeur d , sachant qu'il nous est possible de mesurer la position d'un point, au moyen d'un échantillonneur-enregistreur numérique de transitoires.

### I.3 Discrétisation du problème

La variable x , correspondant à l'abscisse du point dont on observe le mouvement, n'intervient pas directement dans l'étude numérique du signal. Aussi, pour alléger l'écriture de l'exposé qui va suivre, nous noterons simplement la tension électrique proportionnelle au déplacement V(x,t) sous la forme :

$$V(x,t) = Vx(t) \,.\, \sin( 2\pi . f . t + \phi )$$

Vx(t) est donc assimilée à l'amplitude de la vibration de fréquence f.

Pour le dépouillement de ce signal et la détermination du décrément logarithmique, nous allons utiliser la discrétisation introduite par l'échantillonnage.

### I.3.1 *Echantillonnage du signal*

On enregistre la vibration amortie comme n'importe quel signal transitoire, par échantillonnage à la fréquence $F_E > f$ .

Un filtre analogique est incorporé à la chaîne d'acquisition et permet d'obtenir une suite de nombres entiers relatifs, que l'on note Z(i), proportionnels aux déplacements aux instants $t_i = t_0 + i.T_E$ , où $T_E = 1/F_E$ (N.B. le rôle du filtre est d'éliminer les mouvements dus à la souplesse des supports de la poutre par rapport à la paillasse) :

$$Z(i) = Vx(t_i) \,.\, \sin(\, 2\pi.f.t_i + \phi \,)$$

On note : $$Z(i) = Y(i) \,.\, \sin(\, 2\pi.f.i.T_E + \phi o \,)$$

en prenant $\phi o = 2\pi.f.t_0 + \phi$ , nous avons $Y(i) = Vx(t_i)$

### I.3.2 *Recherche de l'enveloppe d'une sinusoïde amortie*

a) Approximation du déphasage $\phi_E = 2\pi.f.T_E$

La différence de phase du signal entre deux valeurs successives est supposée constante ; on pourrait l'utiliser (non sans précautions) pour évaluer la fréquence du signal.

Considérons les valeurs prises à trois instants successifs :

$$\left[\begin{array}{lll} Z(i-1) = Y(i-1) \,.\, \sin(\, 2\pi.f.(i-1).T_E + \phi o \,) & = Y(i-1) \,.\, \sin(\, \phi_i - \phi_E \,) \\ Z(i) = Y(i) \,.\, \sin(\, 2\pi.f.i.T_E + \phi o \,) & = Y(i) \,.\, \sin(\, \phi_i \,) \\ Z(i+1) = Y(i+1) \,.\, \sin(\, 2\pi.f.(i+1).T_E + \phi o \,) & = Y(i+1) \,.\, \sin(\, \phi_i + \phi_E \,) \end{array}\right.$$

On en tire :

$$Z(i \pm 1) = Y(i \pm 1) \,.\, [\, \sin(\phi_i)\cos(\phi_E) \pm \cos(\phi_i)\sin(\phi_E) \,]$$

puis $$\cos(\phi_E) = \frac{\dfrac{Z(i+1)}{Y(i+1)} + \dfrac{Z(i-1)}{Y(i-1)}}{2\,\dfrac{Z(i)}{Y(i)}}$$

Si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée, on peut considérer en première approximation que l'amplitude ne varie pas d'un point à l'autre (i.e. $Y(i\pm1) = Y(i)$) et déduire de cette expression une valeur "instantanée" (c'est-à-dire dans l'intervalle $[t_i-T_E \,,\, t_i+T_E]$) de la fréquence.

b) Approximation de l'amplitude Y(i)

Pour évaluer la suite des valeurs Y(i), nous faisons l'hypothèse que l'amplitude décroît lentement dans l'intervalle $[t_i - T_E \,,\, t_i + T_E]$.

Si nous introduisons le réel positif $\epsilon_i$ , petit devant 1 et tel que :

$$Y(i-1) = Y(i) \,.\, \exp(+\epsilon_i)$$

$$Y(i+1) = Y(i) \,.\, \exp(-\epsilon_i)$$

nous pouvons écrire :

$$\cos(\phi_E) = \frac{Z(i+1)\exp(\epsilon_i) + Z(i-1)\exp(-\epsilon_i)}{2\,Z(i)}$$

et

$$Y(i).\cos(\phi_i) = \frac{Z(i+1)\exp(\epsilon_i) - Z(i-1)\exp(-\epsilon_i)}{2\sin(\phi_E)}$$

Ce qui permet d'exprimer $Y^2(i) = Z^2(i) + Y^2(i).\cos^2(\phi_i)$ :

$$Y^2(i) = Z^2(i)\left[\frac{4.Z^2(i) - 4.Z(i+1)Z(i-1)}{4.Z^2(i) - [\,Z(i+1)\exp(\epsilon_i) + Z(i-1)\exp(-\epsilon_i)\,]^2}\right]$$

Comme en a) , on peut déduire de cette expression les valeurs de Y(i) en considérant en première approximation que $Y(i\pm1) = Y(i)$ ($\epsilon_i$ peut être rendu aussi petit devant 1 que l'on veut, par exemple en augmentant la fréquence d'échantillonnage)

On précise ensuite par itérations successives en remplaçant :

$$\exp(\epsilon_i) \text{ par } \frac{Y(i-1)}{Y(i)} \quad \text{et} \quad \exp(-\epsilon_i) \text{ par } \frac{Y(i+1)}{Y(i)}$$

On peut remarquer que pour que la démarche ci-dessus soit applicable, il suffit que les variations de Y(i) soient lentes. Toutefois, si on ne fait pas l'hypothèse de décroissance, les expressions doivent être modifiées, en prenant par exemple : $Y(i+1) = Y(i).\exp(-\epsilon_{i+1})$

On obtient par ces calculs, un échantillonnage à la fréquence $F_E$ de l'enveloppe d'une sinusoïde, la principale source d'erreur vient du bruit de fond, notamment lorsque Z(i) est proche de zéro en valeur absolue.

On peut également, connaissant $\epsilon_i$ ainsi que la "fréquence instantanée", en déduire le "décrément logarithmique instantané", pour chaque valeur de i.

Toutefois, compte tenu du phénomène physique que nous observons (amortissement dans un corps viscoélastique linéaire), nous préférons raisonner sur la globalité de l'enregistrement, de manière à caractériser l'enveloppe de la sinusoïde sans passer par les moyennes algébriques de ces valeurs "instantanées".

### I.3.3 *Ajustement par une exponentielle décroissante*

Nous abordons une fenêtre du signal en faisant l'hypothèse que le décrément logarithmique y est constant (i.e. $\epsilon_i = \epsilon$ pour $i = 1, \ldots, N$).

On pose donc : $$Y(i) = Y(i-1) \,.\, \exp(-\epsilon)$$

soit : $$\mathrm{Log}(\,Y(i)\,) = \mathrm{Log}\,(\,Y(0)\,) - i.\epsilon$$

Pour procéder à l'ajustement, nous calculons d'abord Y(i), comme en I.3.2.b) , en première approximation avec $\epsilon = 0$.

Ensuite, nous calculons $\epsilon$ en appliquant la méthode des moindres carrés à la relation linéaire entre Log( Y(i) ) et $\epsilon$.

Nous avons souligné plus haut les risques d'erreurs sur Y(i) encourus lorsque Z(i) est proche de 0. Nous excluons donc du calcul, les points en lesquels la tangente de la phase est faible en valeur absolue, autrement dit nous ajoutons la condition :

$$|\mathrm{tg}(\phi_i)| = \left| \frac{2\, Z(i)\sin(\phi_E)}{Z(i+1)\exp(\epsilon_i) - Z(i-1)\exp(-\epsilon_i)} \right| \geq 1$$

On précise par réitérations, la convergence vers une valeur de $\epsilon$ à trois chiffres significatifs, est très rapide.

### I.3.4 Exploitation : *évaluation du décrément logarithmique*

L'ajustement par une exponentielle décroissante de l'enveloppe du signal représentatif du mouvement du point d'abscisse x, fournit une valeur approchée du décrément logarithmique de la vibration :

Rappelons que $Y(i) = F(x).\exp(\,-\delta.f_p.t_i\,)$

soit : $Y(i) = Y(0).\exp(\,-i.\epsilon\,) = Y(0).\exp(\,-\delta.f_p.i.T_E\,)$

On peut admettre que le coefficient $\delta$ est proportionnel au résultat $\epsilon$ de l'analyse numérique, car l'erreur introduite par la numérisation du signal a une espérance nulle dès lors que N est grand.

Soit $d = \exp(\delta) - 1 = \exp(\epsilon.F_E/f_p) - 1$

Pour conclure, il ne manque que la fréquence de la vibration (on suppose que le calculateur est informé de la fréquence d'échantillonnage).

En principe, cette fréquence est constante et égale la fréquence d'excitation, si l'on prend le soin d'interrompre celle-ci après avoir établi un mouvement permanent à la résonance. On peut donc la mesurer au moyen d'un fréquencemètre.

Quoiqu'il en soit, on peut profiter de l'échantillonnage pour évaluer la fréquence moyenne du signal par décompte du nombre des périodes enregistrées et/ou par transformée de Fourier discrète (DFT).

Pour déterminer la fréquence de la sinusoïde par Transformée de Fourier rapide (FFT), il suffit de compléter l'enregistrement par des 0 jusqu'à avoir un nombre total de points égalant une puissance de 2. Cependant, le résultat d'une FFT étant un spectre discret, il faudrait que cette puissance de 2 soit élevée, car l'incertitude absolue sur la fréquence correspond à la résolution, c'est-à-dire au rapport de la fréquence d'échantillonnage au nombre de points utilisés, ce qui amène en général un résultat moins précis. Toutefois, DFT et FFT présentent l'avantage d'être insensibles aux imperfections du signal (bruit de fond).

Quelques précautions élémentaires suffisent à rendre l'incertitude relative sur la fréquence inférieure à l'inverse du nombre N, si l'on procède par décompte du nombre de périodes.

Il faut cependant que le rapport signal/bruit reste suffisant dans l'ensemble de la fenêtre, malgré l'amortissement.

En conséquence, nous avons retenu une démarche mixte :

Dans un premier temps, on évalue la fréquence par décompte des périodes dans une fenêtre comprenant au moins 200 points enregistrés avec une fréquence d'échantillonnage d'autant plus élevée que l'amortissement est rapide.

Puis, on recherche le maximum de la DFT du signal, pour quelques fréquences (pratiquement un dizaine régulièrement espacées) situées dans l'intervalle d'incertitude de la première évaluation.

### I.3.5 Vérification : *simulation numérique*

La figure 1 représente les deux premières millisecondes d'un enregistrement fictif d'une sinusoïde perturbée par un bruit de fond ; la fréquence d'échantillonnage étant 10 KHz (les points Z(i) de l'enregistrement sont symbolisés par les cercles) .

La sinusoïde a pour fréquence 825 Hz et pour amplitude initiale 500, son décrément logarithmique est $100\ 10^{-3}$. Le bruit de fond est aléatoire et d'amplitude 10 (compte tenu du convertisseur A/D utilisé - 12 bits - cette dernière amplitude équivaut à 50 millivolts) :

L'enveloppe de la sinusoïde est déterminée après le calcul point par point de l'amplitude Y(i). Les points retenus pour l'ajustement sont symbolisés par les disques et les points écartés ( $|tg(\phi_i)| < 1$ ) , par les carrés.

L'ajustement réalisé sur une fenêtre contenant 23 périodes (280 points) permet d'évaluer correctement (avec une réitération) l'amplitude initiale (502) et le décrément logarithmique ($101\ 10^{-3}$).

N.B. L'ajustement sur la même fenêtre d'une fonction identique mais sans bruit de fond aléatoire retrouve les caractéristiques de l'enveloppe, soit respectivement 500 et $100\ 10^{-3}$.

La fréquence de résonance, est estimée à 824.4 Hz, par le procédé décrit plus haut (décompte des périodes dans la fenêtre de 28 millisecondes, puis DFT dans l'intervalle [818 Hz , 830 Hz]).

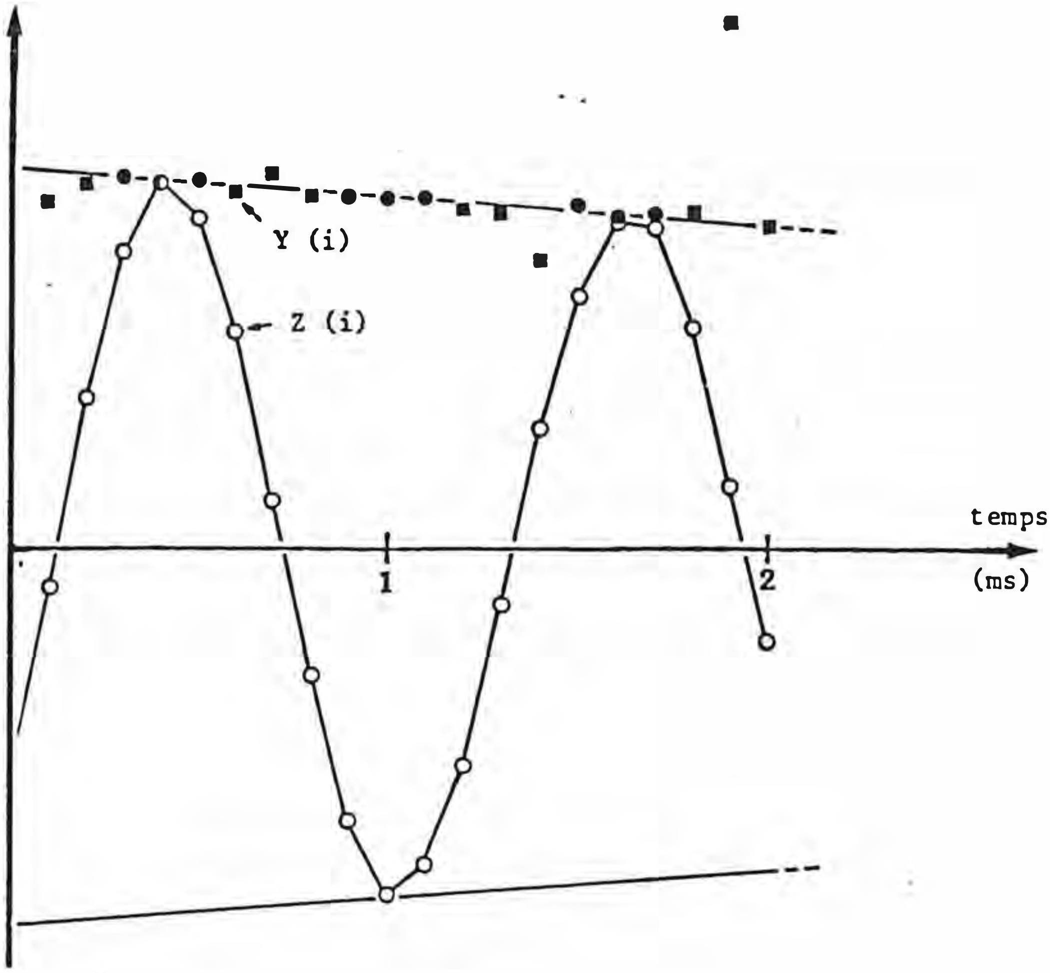



Figure 1 : exemple d'ajustement numérique de l'enveloppe d'une sinusoïde (gros plan x14)

Notes : - O - points du pseudo-enregistrement
- ● - exponentielle décroissante
■ : points de l'enveloppe calculée ne participant pas à l'ajustement

## II DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET APPLICATIONS

Pour procéder à la mesure du décrément logarithmique, on peut utiliser pour l'enregistrement du signal, une chaîne d'acquisition analogue à celle rencontrée au chapitre précédent, c'est-à-dire un enregistreur numérique de transitoires à fréquence d'échantillonnage programmable, relié à un micro-ordinateur (cf B.IV).

L'amortissement étant cependant assez rapide, se pose le problème de déclencher l'enregistrement au moment opportun. Un dispositif simple permet toutefois d'obtenir un déclenchement synchrone à la coupure de l'excitation.

Dans un premier temps, on soumet la poutre à une excitation sinusoïdale au moyen d'un générateur de signaux basses fréquences (GBF). Lorsqu'on augmente la fréquence d'excitation, on rencontre une suite de fréquences de résonance, que l'on assimile aux fréquences propres de la structure.

On admet ainsi que lorsque la fréquence de la poutre est l'une de celles qui provoquent la résonance, le mouvement correspond à un mouvement propre en vibrations naturelles. Il en résulte que lorsqu'on coupe l'excitation, la fréquence du mouvement de chaque point se conserve alors que son amplitude diminue.

L'enveloppe de la courbe est déterminée "point par point", par un algorithme utilisant le fait que le signal est échantillonné à pas de temps constant. Une fonction exponentielle est ensuite ajustée à l'enveloppe, le coefficient de cette fonction conduit à la valeur du décrément logarithmique (cf I.3).

### II.1 Fréquences de résonance

On reconnaît les fréquences de résonance aux maxima de l'amplitude de la vibration lorsque la fréquence d'excitation varie. Notons cependant, qu'il nous suffit d'appliquer à la poutre la méthode d'analyse des vibrations naturelles présentée en B.IV, pour nous épargner de rechercher ces maxima par tatonnements :

Les fréquences de résonance sont égales aux fréquences propres.

#### II.1.1 *Excitation de la poutre flottante*

La moindre surcharge à l'éprouvette déplace les fréquences de résonance par rapport aux fréquences propres de l'éprouvette seule.

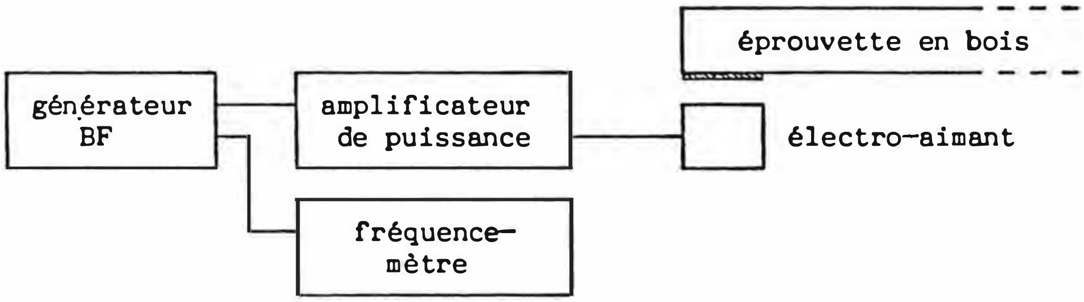
Cependant, si les surcharges sont faibles par rapport à la masse de l'éprouvette, leur effet sur les fréquences est peu important :

Pratiquement on associe indifféremment le décrément logarithmique à la fréquence de résonance ou à fréquence propre de la poutre sans surcharges.

Néanmoins, pour procéder à l'excitation et à la mesure, il est préférable de mettre en oeuvre un dispositif "à contact minimum".

L'excitation au moyen d'un électro-aimant étant la méthode la plus commode, la première étape consiste à coller une pastille de fer doux à l'une des extrémités de la poutre-éprouvette (N.B. si l'on se contente des modes de rang impair, on peut également coller la pastille à mi-longueur).

L'excitation est produite en agissant sur cette pastille au moyen d'un champ magnétique sinusoïdal de fréquence variable, ce qui suppose que l'électro-aimant exerce un champ magnétique permanent (faute de quoi l'effort appliqué aurait un aspect "redressé", donc imparfait, et surtout une fréquence double de celle fournie par le GBF).




1 : Représentation schématique du dispositif d'excitation

II.1.2 *Mesure du déplacement*

La mesure de la réponse comprend deux aspects distincts :

. La première doit permettre de mettre en évidence les fréquences de résonance, on ne recherche alors qu'une série d'extrema locaux de l'amplitude de la réponse en un point convenablement choisi.

. Puis, lorsque l'on a établi une résonance, on veut enregistrer un signal proportionnel au déplacement du point à compter de l'instant où l'on cesse d'entretenir la vibration.

a) *Choix du capteur*

Dans la plage de fréquences où nous nous situons, le choix a été porté sur un capteur à courants de Foucault (DYMAC M60). Pour ce type de capteur sans contact, il est nécessaire de rapporter une seconde cible à l'éprouvette, cette cible pouvant être réalisée avec un matériau conducteur quelconque.

En principe, les capteurs à courants de Foucault doivent être étalonnés en association avec la cible utilisée, si l'on veut une mesure précise de la position de cette dernière (cela découle de son principe de fonctionnement : le capteur crée un champ magnétique HF, dont une fraction de l'énergie est dissipée, en fonction - linéarisée par l'électronique intégrée - de son éloignement et de la conductivité du matériau de la cible ; cf. fig. 2).

Pour simplifier la configuration, nous avons choisi d'équiper l'éprouvette par collage de deux pastilles rectangulaires en fer doux identiques, placées à chaque extrémité, de masse totale $2m_1$ égale à 1 gramme.

Sans autre référence, il est évidemment difficile de procéder à un étalonnage du capteur pour des déplacements dynamiques aux fréquences acoustiques. D'après le constructeur, la plage d'utilisation s'étend du statique à 10KHz, avec toutefois une atténuation de 3dB à 10KHz.

On peut alors vérifier qu'il permet de déterminer l'amplitude d'un déplacement à fréquence fixe, avec une très grande tolérance de positionnement (i.e. il est insensible à la distance à l'éprouvette lorsque celle-ci est comprise entre 1 et 4 mm - ce qui correspond à la plage de linéarité pour des déplacements statiques, cf. fig.2) , ce en quoi il est bien supérieur aux capteurs électromagnétiques "ordinaires" (outre le fait que ceux-ci sont sensibles à la vitesse de la cible).

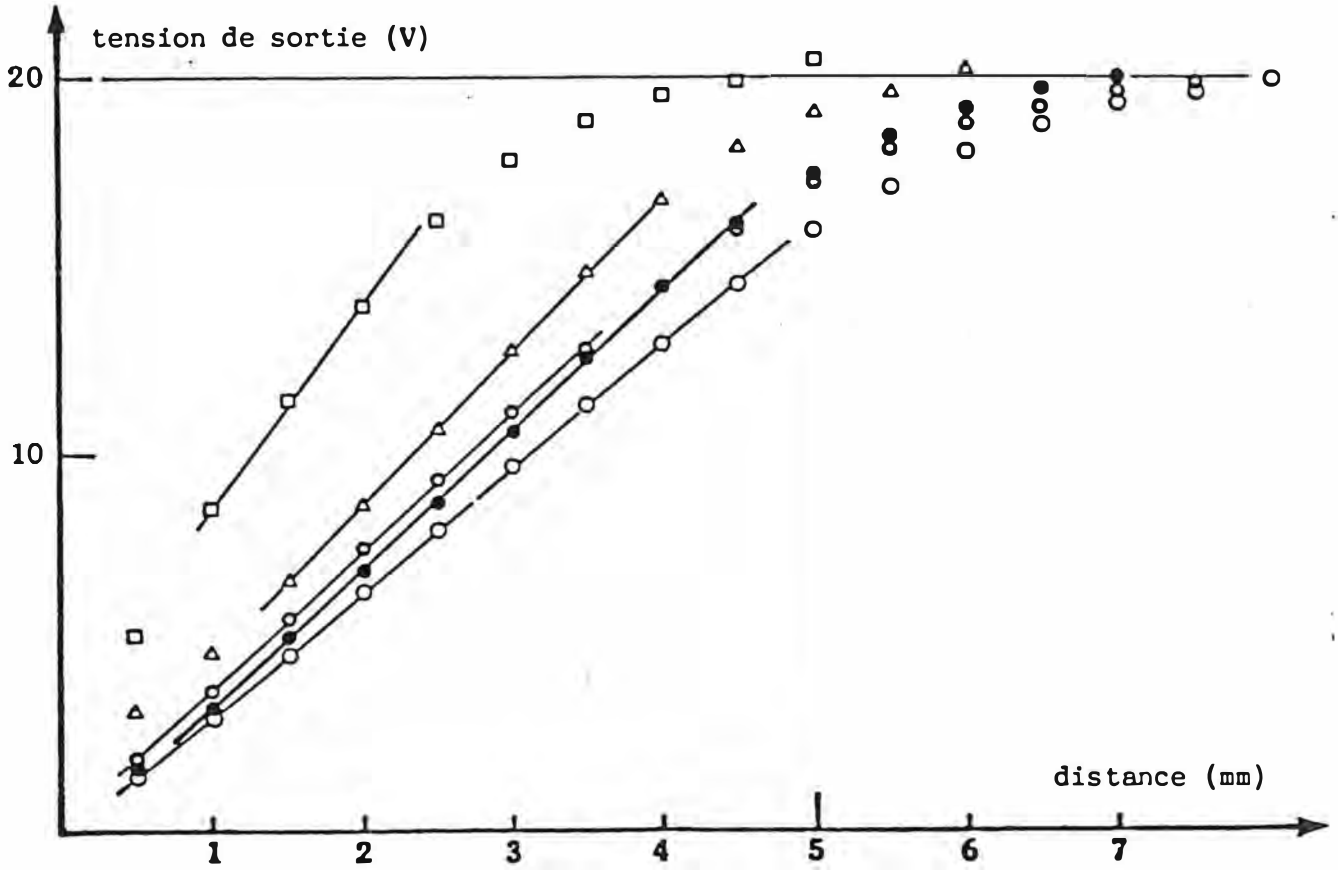


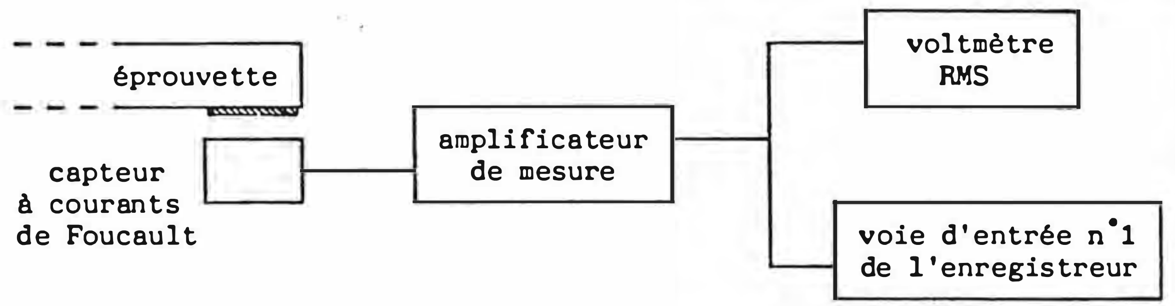

**figure 2** : effet de la nature de la cible sur la courbe d'étalonnage statique du capteur de déplacement à courants de Foucault (diamètre 8mm)

notes : la tension de sortie est mesurée aux bornes du conditionneur associé (DYMAC M600, tension d'alimentation -24 V.)

- ⚬ - acier (massif) largeur 20 mm.
- ○ - pastille carrée en fer doux : ép. 5/10 mm ; masse 1 g.
- ● - pastille rectangulaire en fer doux : ép. 5/10 mm ; masse 0.5 g.
- △ - disque en acier : ep. 3/10 mm ; masse 0.18 g.
- □ - feuille d'aluminium (autocollante) ; masse 0.05 g.

**b)** *Recherche de la résonance*

Le signal fourni par le capteur de déplacement est amplifié et son amplitude est visualisée au moyen d'un voltmètre RMS à aiguille (certains amplificateurs de mesure combinent ces deux fonctions).




2 : Représentation schématique du dispositif de mesure

L'opérateur agit sur la fréquence du signal basse tension en sortie du générateur BF, jusqu'à obtenir la stabilité de la déviation maximale de l'aiguille du voltmètre. On peut moduler l'amplitude à la résonance soit en modifiant le gain de l'amplificateur de puissance (i.e. l'intensité du champ magnétique), soit en modifiant la distance de l'electro-aimant à l'éprouvette (cf. encadré 1).

II.1.3 *Effet des surcharges ponctuelles sur les fréquences de résonance*

Pour établir la figure 3, nous avons utilisé des éprouvettes normalisées de différents bois de manière à faire varier la surcharge relative en utilisant toujours les mêmes pastilles métalliques. Les fréquences propres de rang 1 et 2 ont été déterminées immédiatement avant et après le collage des pastilles, au moyen du banc d'essai présenté au chapitre précédent (cf. B.IV), par décomposition spectrale des vibrations sollicitées par une percussion (avec une résolution d'environ 1 Hz).

La masse de l'éprouvette parallèlépipèdique en bois est notée $m_0$. Celle des pastilles métalliques est notée $m_1$ ( $\ll m_0$ ). Les deux pastilles sont identiques et rapportées aux extrémités de la poutre.

L'effet des surcharges sur la fréquence du mouvement propre de rang 1 peut être ajusté par régression linéaire ; on obtient la droite d'équation :

$$\frac{f_p}{f_r} = 1 + \left[ 1.74^{**} \cdot \frac{2m_1}{m_0} + 0.05 \right] \quad \text{(rang 1 uniquement)}$$

Si l'on fait un ajustement sur les deux premiers modes, on obtient une droite de pente sensiblement inférieure (représentée en trait plein) :

$$\frac{f_p}{f_r} = 1 + \left[ 1.56^{**} \cdot \frac{2m_1}{m_0} + 0.16 \right] \quad \text{(rangs 1 \& 2)}$$

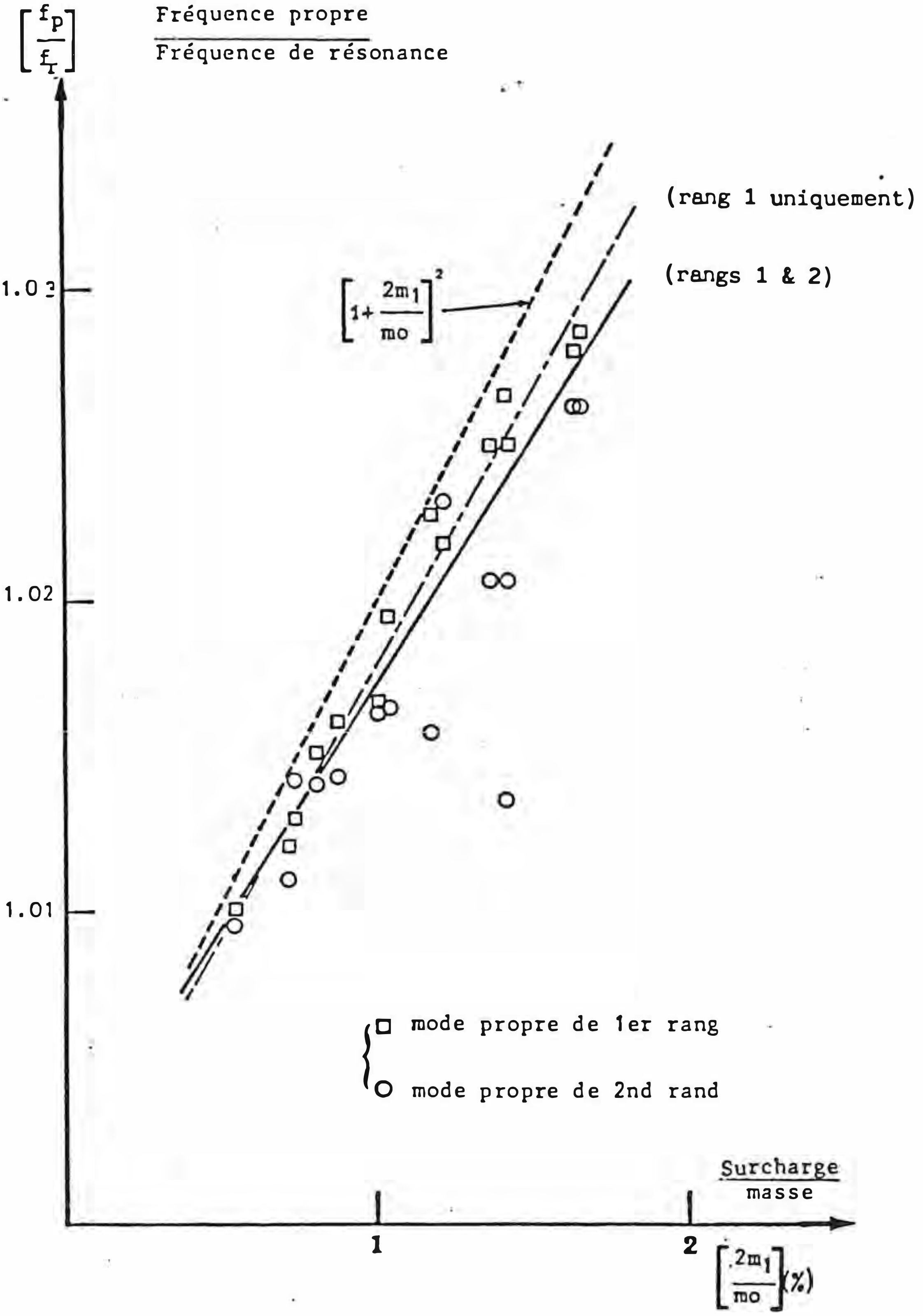



figure 3 : effet sur les fréquences propres d'une poutre flottante des surcharges concentrées aux extrémités

Classiquement il est proposé une correction faisant intervenir la surcharge relative, c'est-à-dire le rapport $2m_1/m_0$, sous l'une des formes :

$$\left[1 + \frac{2m_1}{m_0}\right]^2 \quad \text{ou} \quad \left[1 + 2\cdot\frac{2m_1}{m_0}\right] \quad \text{ou encore} \quad \left[1 + 4\cdot\frac{2m_1}{m_0}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ces corrections sont équivalentes au premier ordre, la première correspond à la courbe représentée en pointillés sur la figure 3 ; il apparaît qu'elles sont légèrement surévaluées (notamment pour les fréquences de rang 2).

### II.1.4 *Position des appuis*

Il est important d'éviter les mouvements de corps solide que la structure pourrait avoir lorsqu'elle repose sur des appuis élastiques.

La poutre repose donc sur deux appuis rigides. Pour limiter les interactions entre ces appuis et le mouvement, il convient de faire coïncider les appuis avec les positions de deux noeuds du mode de vibration que l'on souhaite exciter.

Dans le cas des vibrations de flexion des corps élastiques, les positions de ces noeuds sont données approximativement par la résolution en déplacement de l'équation de Bernoulli (tableau 1).

Remarques : - Si la poutre est viscoélastique, il n'y a pas de noeuds à proprement parler (le mouvement n'est pas stationnaire).

- Dans le cas d'une poutre élastique obéissant au modèle de Timoshenko, les positions des noeuds dépendent du module de cisaillement (en général inconnu) dans le plan du mouvement.

- Cependant nous donnons crédit aux études expérimentales qui ont montré que l'on peut tolérer un écart de quelques millimètres par rapport aux positions calculées à partir des valeurs indiquées (tableau 1), sans conséquences sensibles sur la mesure du décrément logarithmique (Kataoka & Ono [28]).

| rang du mode | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22.4 | | | | 77.6 |
| 2 | 13.2 | | 50 | | 86.8 |
| 3 | 9.4 | 35.6 | | 64.4 | 90.6 |
| 4 | 7.3 | 27.7 | 50 | 72.3 | 92.7 |

Tableau 1 : Positions relatives à une extrémité (% de la longueur) des noeuds des premiers mouvements propres solutions de l'équation de Bernoulli

## II.2 Calcul du décrément logarithmique

L'échantillonnage du mouvement naturel amorti et l'ajustement de son enveloppe par une exponentielle font l'objet d'un programme spécifique permettant de rendre sytématique la démarche expérimentale.

La configuration est identique à celle mise en oeuvre au chapitre B (cf. B.IV.3.1), à la seule différence qu'une deuxième voie de la carte d'acquisition doit nécessairement être disponible pour recueillir l'impulsion de déclenchement de l'enregistrement (trigger externe).

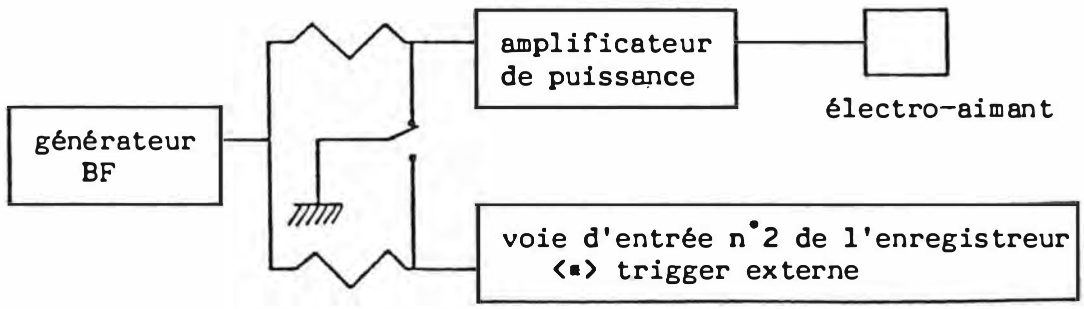
La fréquence d'échantillonnage et le nombre de points de l'enregistrement sont fixés au préalable. Toutefois, l'opérateur a la possibilité de limiter l'analyse à une "fenêtre", dans laquelle notamment la fréquence du signal est calculée avec une précision relative égale à l'inverse du nombre de points anlysés (cf I.3.4). Ainsi, d'une manière générale il est préconisé de prendre un nombre de points d'échantillonnage au moins égal à 200 (sachant qu'il peut aller jusqu'à plusieurs milliers).

### II.2.1 *Enregistrement du mouvement naturel*

Lorsque l'on coupe l'excitation, la fréquence du mouvement de chaque point se conserve, alors que son amplitude diminue.

L'enregistrement est déclenché lorsque la tension d'entrée d'une voie spécialisée diffère de zéro (situation créée par une impulsion). Inversement, pour interrompre l'excitation, il faut annuler la tension d'entrée de l'amplificateur de puissance. Ces deux opérations peuvent être exécutées simultanément à l'aide d'un simple interrupteur.

Lorsque l'éprouvette est en résonance, il suffit de manoeuvrer l'interrupteur pour couper l'excitation et permettre que le signal BF lui-même fasse office d'impulsion de déclenchement (encadré 3).




3 : Circuit permettant le déclenchement (source analogique externe) synchronisé à la coupure de l'excitation.

Lorsque l'enregistrement est achevé, il est transféré en mémoire vive, puis placé dans un tableau de nombres entiers géré par QuickBASIC.

L'opérateur peut visualiser la totalité de l'enregistrement, sous forme graphique (points Z(i) de la figure 1).

### II.2.2 *Procédure de traitement du signal*

Le principe de l'analyse numérique du signal a été détaillé en I.

L'enveloppe de la courbe est déterminée "point par point", dans un sous-échantillon (fenêtre), que l'opérateur a la possibilité de redéfinir à partir du clavier (en se basant sur la représentation graphique de l'échantillon initial).

La fenêtre est automatiquement réduite au nombre entier de périodes le plus proche, ce qui permet d'évaluer la fréquence moyenne du signal, avec une précision optimale (la fréquence qui n'intervient lors de l'ajustement de l'enveloppe n'apparaît qu'à la fin de la procédure).

L'ajustement d'une fonction exponentielle décroissante à l'enveloppe, ne nécessite normalement pas plus d'une réitération, compte tenu de la petitesse du décrément logarithmique.

Après la seconde itération, le nuage des points issus du calcul de l'enveloppe, ainsi que la courbe d'ajustement, sont reproduits sous forme graphique en surimpression de la sinusoïde amortie de façon à vérifier visuellement la qualité de l'ajustement (la courbe d'ajustement doit être tangente à la sinusoïde).

Le coefficient de la fonction d'ajustement et la fréquence moyenne de la sinusoïde nous donnent finalement la valeur du décrément logarithmique dans la fenêtre (cf I.3.4).

## II.3 Exemples d'application

Pour comparer le décrément logarithmique aux autres caractéristiques du comportement acoustique, nous utilisons un assortiment d'éprouvettes en différents bois tropicaux, toutes conditionnées depuis au moins deux mois dans un environnement stable à 20°C et 65%HR.

N.B. Ces éprouvettes, de droit fil et de dimensions nominales R = 20 mm , T = 20 mm et L = 340 mm, ne sont représentatives ni des feuillus tropicaux en général, ni de leurs essences respectives (s'agissant des plus "beaux" spécimens empruntés à des lots destinés à une autre expérimentation).

Pour étudier l'effet de la fréquence sur le décrément logarithmique, on peut faire des mesures en excitant successivement plusieurs modes propres d'une poutre. Cependant, l'intervalle entre fréquences propres devenant rapidement très grand, pour améliorer la "résolution" d'une telle étude, il est nécessaire de modifier la géométrie de l'éprouvette.

Certains champignons occasionnent une dégradation plus ou moins sélective des composants des parois cellulaires. Ces attaques ne correspondent pas forcément à une perte de masse importante, mais "fragilisent" le matériau, ce qui peut se mettre en évidence par un essai destructif (Trong [67]). Nous avons cherché à caractériser la dégradation du bois et les performances de produits de préservation en observant l'effet d'une attaque fongique sur les fréquences de résonance et les décréments.

### II.3.1 *Illustration de la variabilité interspécifique*

Les résultats bruts obtenus sur l'assortiment d'essences tropicales sont reportés sur les figures 4, 5 et 6 .

Avant d'ajuster les pastilles métalliques (cf. II.2.3), les deux premières fréquences propres en flexion ont été déterminées, de manière à calculer les caractéristiques mécaniques du bois (module d'Young spécifique et rapport des modules d'Young et de Coulomb - pondéré par le facteur de forme K ).

Pour chaque éprouvette (i.e. masse volumique), la valeur indiquée du décrément logarithmique correspond à l'amortissement du mode propre de rang 1.

a) *La masse volumique n'est pas un facteur explicatif des dispersions du module d'Young spécifique ou du décrément logarithmique.*

Ce résultat tend à confirmer qu'il est licite de calculer le module d'élasticité par le produit du module spécifique $E/\mu$ par la masse volumique.

Sur la figure 4, deux éprouvettes se détachent du nuage :

- l'éprouvette de Yayamadou (Virola michelii ; orig. Guyane ; 520 $Kg/m^3$), se caractérise par un module spécifique très élevé ($35.4 \cdot 10^6$ $m^2/s^2$)

- l'amortissement des vibrations dans l'éprouvette de Macarecuia (Couroupita sp. ; orig. Brésil ; 1260 $Kg/m^3$), est nettement moins rapide que dans les autres éprouvettes. Le décrément logarithmique du premier mouvement propre ne vaut que $11 \cdot 10^3$.

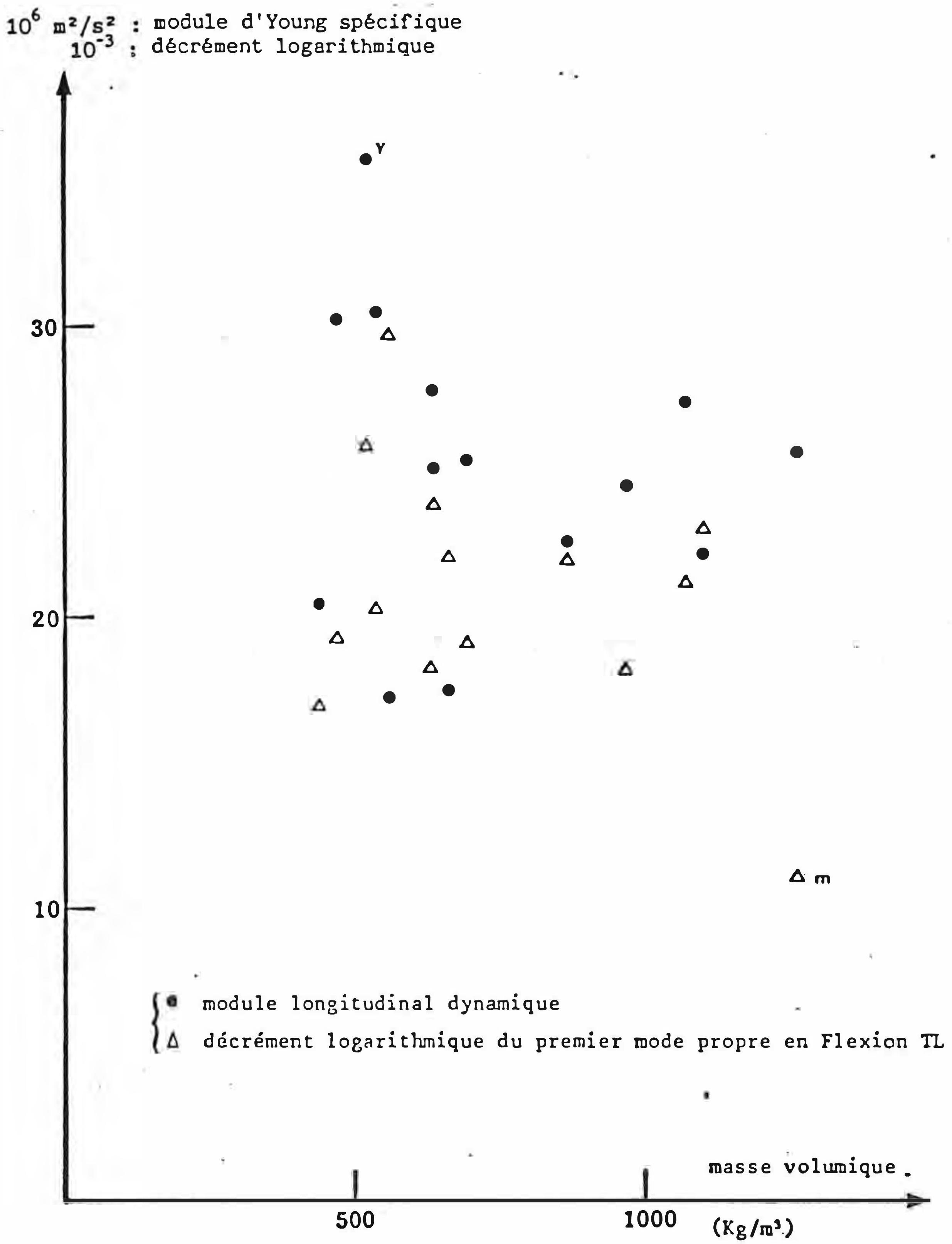



figure 4 : Absence de corrélations entre module spécifique ou décrément logarithmique et masse volumique
(assortiment d'essences de bois tropicaux)

b) La dispersion des points de la figure 5 atteste de l'absence de corrélation entre module spécifique et décrément logarithmique.

Toutefois, si l'on écarte les deux échantillons déjà mentionnés, on peut ne pas rejeter (avec un risque de 10%) les résultats d'une régression linéaire (pente négative de valeur 0,04 dans la configuration représentée).

N.B. Une corrélation négative (entre logarithmes) a été mise en évidence dans le cadre d'une étude monospécifique d'un bois de conifère (Hinoki, Chamaecyparis obtusa) par Norimoto et al. [42].

c) La dispersion des points de la figure 6 indique que le décrément logarithmique n'est pas lié significativement au ratio des modules E/KG (G est ici le module de cisaillement dans le plan TL).

N.B. Au chapitre précédent, nous avons souligné les possibles effets du comportement différé sur la détermination du ratio E/KG.

d) Vérification ayant cependant été faite, on rejette de même l'hypothèse d'une relation linéaire entre E et $\delta$ d'une part ou entre le produit KG et $\delta$ d'autre part.

### II.3.2 *Effet de la fréquence sur le décrément logarithmique*

La figure 7 rassemble les résultats obtenus en réduisant la longueur d'une éprouvette de section constante, découpée sur quartier et excitée suivant la direction tangentielle du bois.

Lorsque la poutre a un élancement suffisant, il est possible d'exciter successivement plusieurs modes propres afin de mesurer le décrément logarithmique. Dans le cas d'une éprouvette normalisée, il est généralement possible d'étudier l'amortissement des deux premiers mouvements propres.

Dans le cas de l'éprouvette en bois de conifère qui a servi a établir cette figure, il n'était cependant pas possible de dépasser le seuil de 2KHz, en raison des limites en puissance de l'excitation : au dela de ce seuil, le rapport signal/bruit devient trop faible pour que la méthode mise en oeuvre soit efficace.

Pour étudier l'effet de la fréquence sur le décrément logarithmique, il est toujours possible de modifier la géométrie de l'éprouvette : en réduisant sa longueur, on élève facilement les fréquences de résonance.

La première option est assez rapide dans son exécution, puisque la seule précaution à prendre consiste à déplacer les points d'appuis de la poutre (Ce qui, à l'heure actuelle, nécessite néanmoins de faire une règle de trois, car la longueur de l'éprouvette n'intervient pas dans le calcul du décrément logarithmique). La seconde alternative permet d'avoir davantage de points mais présente l'inconvénient d'être sévèrement destructive.

Il apparaît que les deux types de résultats obtenus sur la même éprouvette "cohabitent" bien sur la figure 7 : dans l'intervalle considéré, le décrément logarithmique croît régulièrement avec la fréquence.

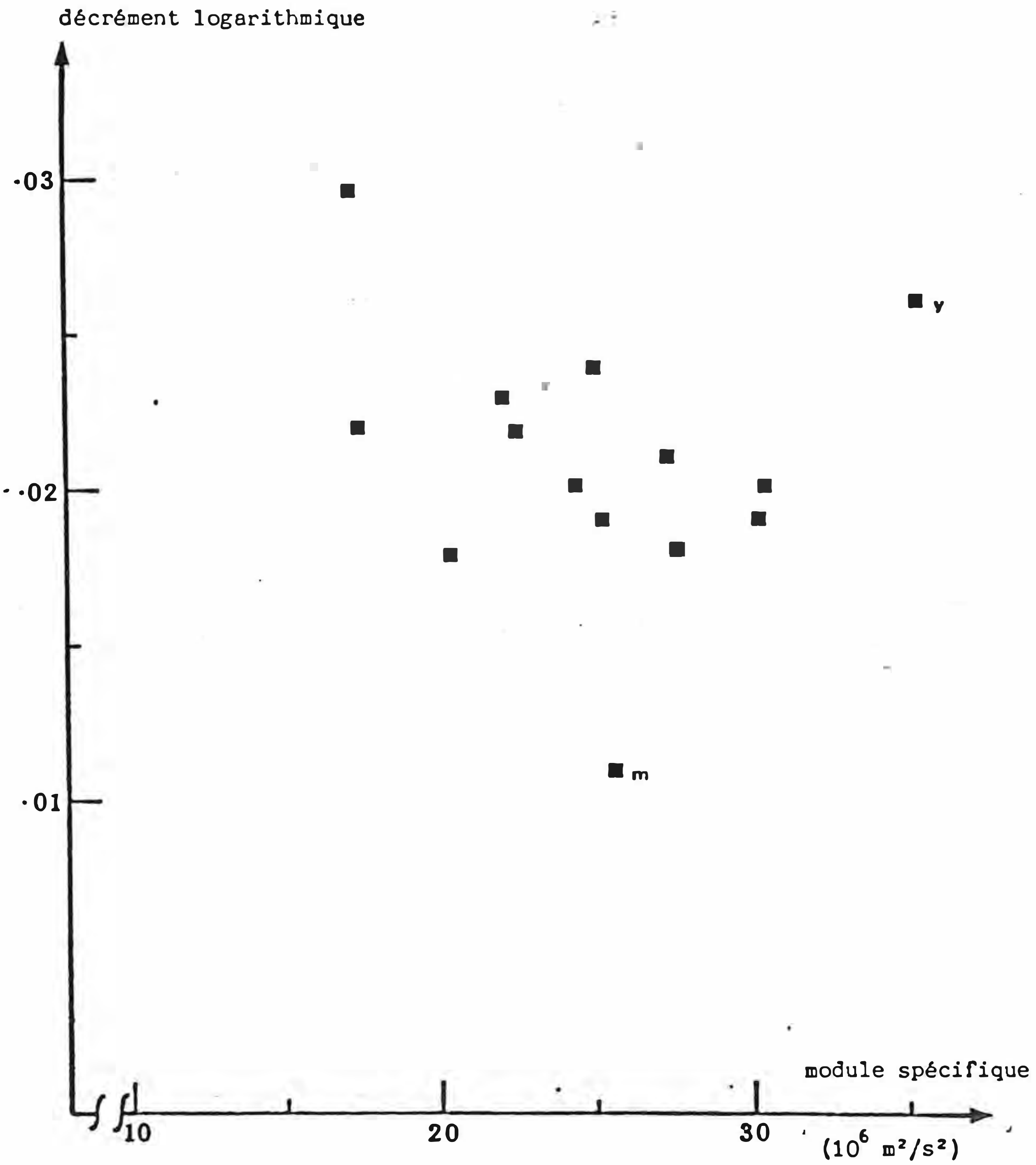



figure 5 : Abscence de corrélation entre décrément logarithmique et module dynamique (assortiment d'essences de bois tropicaux)

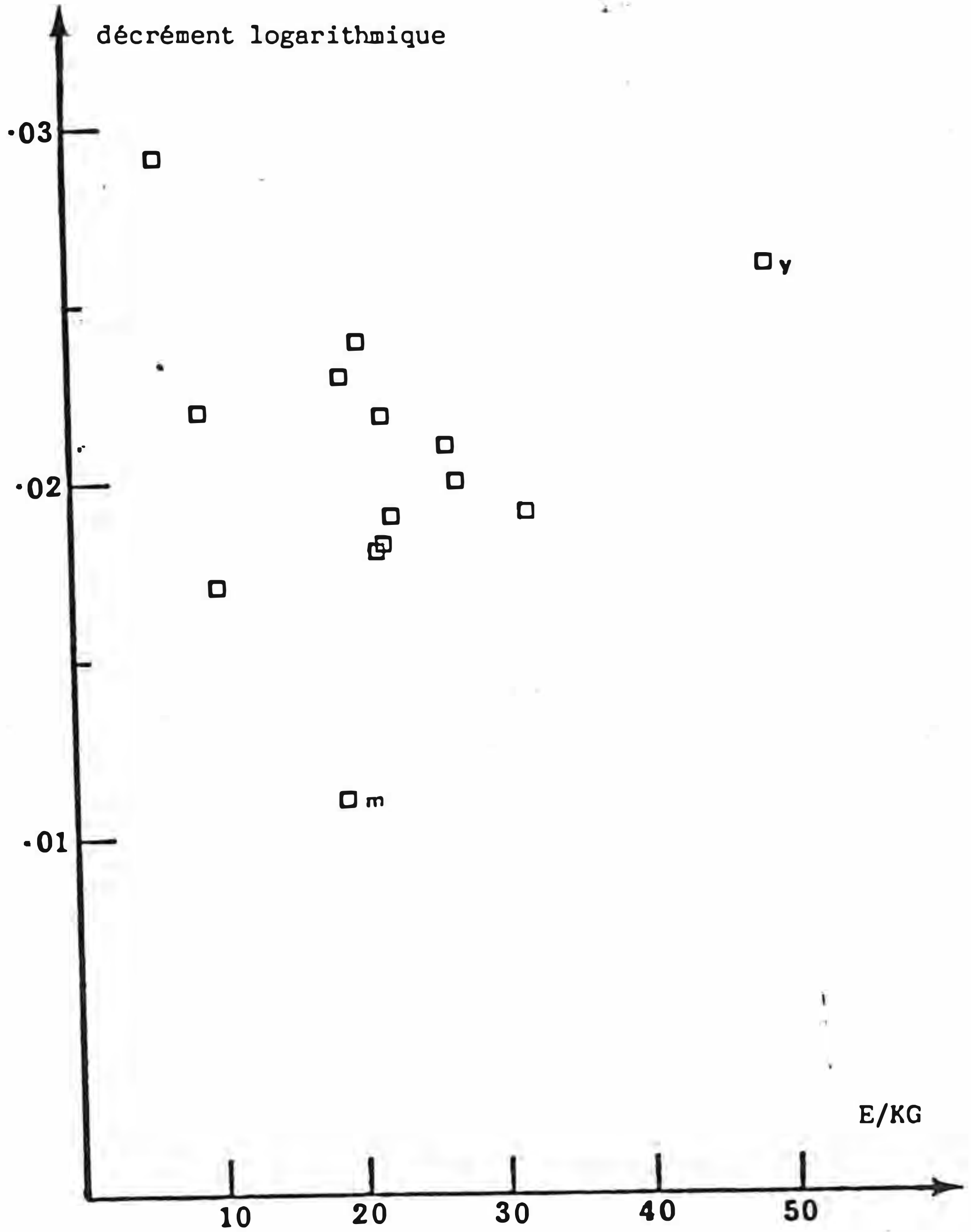



**figure 6** : Abscence de corrélation entre décrément logarithmique et ratio pondéré du module dynamique au module de cisaillement (assortiment d'essences de bois tropicaux)

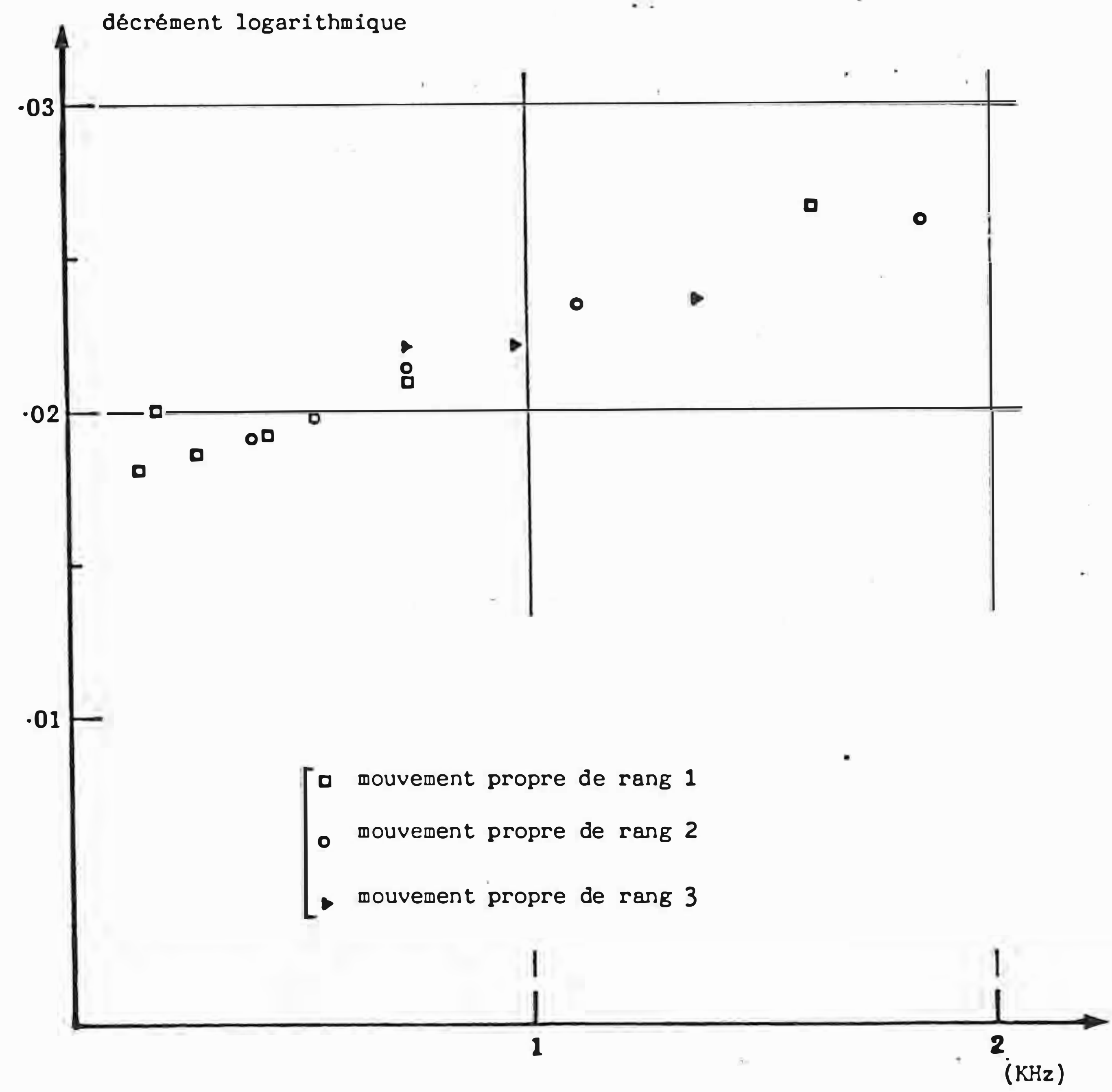



**figure 7** : Relation entre décrément logarithmique et fréquence

essence : Kaori (Agathis laureolata)
origine : Nouvelle Calédonie

échantillon : dimensions transversales : A = 30x30 mm² ; l = 105 cm
sec à l'air
masse volumique : 480 Kg/m³

### II.3.3 *Evaluation de l'efficacité fongicide de produits de préservation*

Habituellement, la résistance naturelle du bois à la pourriture ou l'efficacité des traitements fongicides préventifs, sont étudiées en laboratoire sur des échantillons de dimensions suffisamment petites pour permettre la mise en présence de champignons en condition stérile. Pour opérer, on place l'échantillon sur un milieu gélosé, à l'intérieur d'un flacon de verre préalablement stérilisé et la résistance du bois est qualifiée par la perte de masse de l'échantillon au bout d'un temps prédéterminé de développement du mycellium.

Cette perte de masse correspond à la dégradation, plus ou moins sélective suivant les champignons, des macromolécules organiques des parois cellulaires, ce qui se traduit par une perte des qualités mécaniques du matériau (notamment de la résilience). Cependant, la petite taille des échantillons (imposée par la taille des flacons), les rend inadaptés aux essais mécaniques.

La mesure non-destructive du décrément logarithmique et des fréquences de résonance permet d'envisager une méthode inhabituelle d'évaluation de la détérioration causée par une attaque d'origine fongique (Wang et al. [77]).

#### a) *Matériel et méthode*

- l'étude a porté sur 60 échantillons extraites d'un arbre de Guyane Française. L'essence considérée, appelée Mapa (Couma guianensis), est de densité moyenne, réputée peu durable mais ayant une bonne imprégnabilité. Nous avions pour ces échantillons les caractéristiques suivantes :

dimensions nominales initiales : $A = 20 \times 20$ mm² ; $l = 34$ cm
conditions de stabilisation : 20°C , 65 %HR
masse volumique moyenne initiale : 513 Kg/m³

Après stabilisation des éprouvettes en environnement normal (20°C, 65%HR), la masse volumique et les deux premières fréquences propres en vibrations transversales ont été mesurées.

- les éprouvettes ont été réparties aléatoirement en six séries de dix individus ; quatre de ces séries ont été traités par trempage pendant cinq minutes, ce procédé étant le plus fréquemment rencontré de par le monde, les deux autres séries jouant le rôle de témoins.

Deux produits de préservation en solution organique ont été utilisés pour ce traitement (20 éprouvettes par produit).

- Toutes les éprouvettes ont été infestées dans leur partie médiane au moyen de quatre inoculats de section rectangulaire et de longueur 80 mm, accolés aux faces latérales après avoir été eux mêmes préalablement infestés en condition stérile par l'un des deux champignons suivants :

Champignon A (pourriture fibreuse) :
Coriolus versicolor, Quelet, souche CTB 863a

Champignon B (pourriture cubique) :
Gloeophyllum trabeum, Murill, souche BAM.EBN 109

La désignation des séries en découle naturellement :

série A0 : pourriture fibreuse, sans traitement de préservation
série B0 : pourriture cubique, sans traitement de préservation
série A1 : pourriture fibreuse, traitée par le premier produit
série B1 : pourriture cubique, traitée par le premier produit
série A2 : pourriture fibreuse, traitée par le second produit
série B2 : pourriture cubique, traitée par le second produit

Les pourritures se sont développées pendant une période de 12 semaines de mise en présence en condition non stérile, les éprouvettes reposant simplement sur une litière de vermiculite humide contenant un fongicide sélectif.

Après séparation des inoculats et nettoyage de la surface des éprouvettes pour les débarrasser des fragments apparents de mycellium, une nouvelle stabilisation en environnement normal a été effectuée.

Dans le nouvel état d'équilibre, la masse volumique, la fréquence du premier mode propre et le décrément logarithmique ont été mesurés, puis les éprouvettes ont été rompues en flexion quatre points (Les résultats de l'essai de rupture quasistatique sont réservés à une autre publication).

N.B. La masse volumique, est évaluée par le rapport de la masse au produit des dimensions de l'éprouvette. Après l'infestation, les dimensions transversales ont été relevées aux extrémités restées saines. Dans le cas de la série B0, que visuellement on pouvait qualifier de très endommagée par la pourriture, il est certain que cette façon de faire a introduit un biais systématique (surestimation du volume total).

b) Résultats des essais dynamiques

Le tableau 2, représente la synthèse des résultats de cette expérience :

| | A0 | A1 | A2 | B0 | B1 | B2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| masse vol. init. $Kg/m^3$ | 512 | 518 | 512 | 512 | 513 | 513 |
| fréq. propre init. Hz | 891 | 868 | 880 | 892 | 876 | 870 |
| masse vol. finale $Kg/m^3$ | 504** | 514 | 502** | 505** | 519** | 514 |
| fréq. propre finale Hz | 825** | 850** | 861** | 685** | 862** | 860** |
| décr. log. final $10^{-3}$ | 22,2 | 22,3 | 27,8 | 37,2 | 22,6 | 23,4 |

**tableau 2** : Valeurs moyennes (séries de 10) des grandeurs mesurées avant et après l'infestation
** : différences significatives au risque de 1 % (test t)

Les variation de masse volumique *apparente* sont faibles, même si elles sont parfois déclarées significatives par le test de comparaison des moyennes (échantillons appariés ; risque de 1%), notamment pour les séries non traitées.

L'augmentation significative de masse volumique des éprouvettes de la série B1 peut être due à l'imprégnation du produit de préservation. Cette hypothèse conduit à penser que le premier produit limite davantage la perte de masse volumique que le second, quel que soit le champignon.

Les variations de valeur de la première fréquence propre vont toutes dans le sens d'une diminution du module apparent. L'amplitude de ces variations dans le cas des éprouvettes non traitées permet de distinguer les effets spécifiques des pourritures :

La pourriture cubique, en s'attaquant préférentiellement aux polysaccharides affecte la rigidité du matériau dans la direction des fibres.

On note pour la série B0 que le décrément logarithmique a une valeur considérablement plus élevée que dans le cas des séries traitées, ce qui correspond à une augmentation des frottements internes dans le résidu "enrichi" (relativement) en lignines.

Sur l'ensemble des trois séries (mais pas sur chacune d'elles prise séparément), on obtient une corrélation très significative entre diminution de la fréquence du premier mouvement propre (variable explicative) et décrément logarithmique (variable expliquée). Le nuage est cependant étiré par la série B0 et la variance des résidus est moindre pour les séries B1 et B2 .

La pourriture fibreuse cause une diminution du module apparent moins prononcée, mais qui confirme l'efficacité des produits de préservation.

On note pour la série A2 une valeur moyenne du décrément logarithmique plus élevée que pour les deux autres séries. Or, contrairement à ce qu'on observe dans le cas de la pourriture cubique, il n'y a pas de corrélation ici entre la diminution de la fréquence propre et le décrément logarithmique.

L'impossibilité de faire référence aux valeurs initiales du décrément limite malheureusement l'interprétation de cette grandeur. Cependant, la corrélation observée dans le cas du champignon B indique une valeur moyenne "initiale" égale à $22{,}0 \times 10^{-3}$ . Le décrément semble donc peu affecté par le champignon A.

En résumé, la variation de la fréquence d'un mouvement propre semble être un critère discriminant des attaques fongiques plus général que le décrément logarithmique et plus efficace que la masse volumique.

## II.4 BILAN

a) La méthode proposée pour la détermination du décrément logarithmique est basée sur la notion de vibration naturelle et le lissage de l'enveloppe d'une sinusoïde par une exponentielle décroissante, comme dans le cas des oscillations lentes (mouvements pendulaires).

A la différence des autres méthodes envisageables pour évaluer le décrément logarithmique, celle-ci présente l'avantage de ne pas faire intervenir la fréquence avant la phase finale du calcul, c'est-à-dire au moment du passage du coefficient de l'exponentielle au décrément.

Ainsi, l'incertitude sur la fréquence est relativisée, au lieu d'avoir un caractère absolu comme c'est le cas de la mesure du facteur de qualité (largeur du pic de résonance) ou des transformations numériques introduisant une discrétisation du spectre (cf. FFT).

b) Au cours de cette étude, la plage "utile" de fréquences, était limitée à environ 2 KHz. Elle peut probablement être élargie, suivant les moyens expérimentaux mis en oeuvre (sensibilité de la mesure du mouvement, puissance de l'excitation).

Cependant, comme dans le cas du module d'Young dynamique, on peut obtenir une validation expérimentale du dispositif en modifiant la géométrie d'une éprouvette de façon à effectuer des recoupements entre mouvements propres de rangs différents à l'intérieur de la plage de fréquence autorisée.

Cette plage paraît d'autre part suffisante pour diverses applications à l'étude du comportement du bois, sous l'effet de variations de température ou d'humidité par exemple.

c) Le décrément logarithmique est un paramètre lié à la fréquence et à certaines formes d'endommagement du matériau.

Par contre il semble indépendant de la masse volumique et du module d'Young dynamique, ce dernier étant supposé indifférent à la fréquence d'excitation.

A tous ces points qui justifieront sans doute la collecte de nouvelles données expérimentales, on peut ajouter le problème déjà soulevé de la dépendance du module de Coulomb vis à vis de la fréquence, qui suppose un certain nombre de développements à apporter à la méthode de dépouillement présentée au chapitre précédent (hypothèse de variation de G à E constant).

# CONCLUSIONS

*Au premier degré* : **Il n'est point besoin d'avoir "de l'oreille" pour construire un xylophone.**

- pour la sélection de l'essence ou de tout autre matériau, la durée de la vibration peut être quantifiée au travers du décrément logarithmique, en sachant toutefois que celui-ci est susceptible de dépendre de la note considérée. Dans le cas du bois, il faut cependant veiller à la stabilité du taux d'humidité lorsque l'on change d'environnement, tout en sachant qu'on peut l'améliorer par différents traitements, en surface (vernis) ou en profondeur (acétylation).

- la mesure des caractéristiques mécaniques du bois d'un élément permet de le dimensionner pour que la fréquence de son premier mouvement propre, qui est celui que l'instrumentiste excite à l'aide de son maillet, soit celle d'une note déterminée.

Cette référence au xylophone vise d'autre part à illustrer la reproductibilité qu'on peut attendre des méthodes vibratoires présentées.

*Au second degré* : il n'est point besoin d'avoir une machine d'essai pour évaluer de façon systématique l'élasticité du bois dans la direction des fibres.

- On utilise néanmoins de préférence les éprouvettes spécifiées par les procédures d'essais normalisées, qui sont le plus souvent des poutres bien orientées et de sections carrées, mais d'élancement faible (compte tenu de l'anisotropie du bois).

Lorsque ces caractéristiques géométriques sont connues, on peut calculer le module d'Young en éliminant les effets du cisaillement. Cette démarche est donc à comparer à un essai de flexion pure (exploitation de la déformée d'une éprouvette soumise à un moment constant).

Les positionnements de l'éprouvette sur ses supports et de l'instrumentation de mesure, exigent toutefois moins de précaution que dans la plupart des essais classiques.

- Les premières fréquences propres des vibrations naturelles, qui sont donc imposées par la géométrie du système, sont dans la plage acoustique. Elles sont suffisamment élevées pour que les mouvements soient d'amplitude faible par rapport à l'état d'équilibre.

Dans ces conditions, on peut considérer qu'elles n'induisent pas d'effet permanent : les essais vibratoires sont non destructifs.

- Lorsque la vibration d'une structure n'est pas entretenue, son amplitude décroît plus ou moins rapidement en raison des frottements internes. Le comportement réel du bois n'est donc pas parfaitement élastique.

Il apparaît cependant que le module d'Young dans la direction des fibres est peu affecté par la fréquence, ce qui permet de négliger la dispersion "interspécimen" des fréquences propres.

Les effets certains de la fréquence sur le décrément logarithmique et probables sur le module de Coulomb soulèvent par contre le problème de la prise en compte du cisaillement dans l'étude des déformations d'une structure en bois.

*Aux degrés supérieurs* : il est possible d'étendre largement le domaine d'application des méthodes vibratoires de caractérisation du comportement mécanique du bois.

- La détermination du module d'Young, par les vibrations de flexion sur des parallélépipèdes de bois sans défaut, n'exige pas d'avoir des éprouvettes très élancées.

En principe, rien ne s'oppose à ce que ces méthodes s'appliquent aux autres directions d'anisotropie du bois (on en trouve d'ailleurs des exemples dans la littérature).

- Elles peuvent être appliquées sans risque à des échantillons destinés à une autre expérimentation, éventuellement sans rapport avec les vibrations de structure (effets du temps, de la température, de l'humidité, suivi de l'endommagement, calculs de prévision, etc...).

Laissons à chacun le soin d'apprécier cette potentialité ...

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

N.B. Certains articles parus dans MOKUZAI GAKKAISHI - alias Journal (*-shi*) of the Japan Wood (*mokuzai*) Research (*gak'-*) Society (*-kai*) - sont rédigés en langue japonaise. Les illustrations de ces articles sont cependant claires (résultats expérimentaux), leurs légendes étant généralement en anglais.

[1] R.A. ANDERSON (1953): Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory, J. Appl. Mech., Dec., p.504-510.

[2] T. AOKI, T. YAMADA (1972): The viscoelastic properties of wood used for the musical instruments, Wood Research N°52, p.13-30.

[3] Anonyme (1978): Transformation de Fourier rapide (FFT), conference B.&K. réf. 210F, 20p.

[4] D.BLAY, L. BOURGAIN & G. SAMSON (1971): Application of electro-acoustical techniques to the determination of the modulus of elasticity by a non-destructive process, B.&K. Tech. Rev., N°4, p.3-23.

[5] J. BODIG, B.A. JAYNE (1982): Mechanics of wood and wood composites, VAN NOSTRAND REINHOLD Co, New York.

[6] P.A. BORDONNE, T. OKUYAMA, S.N. MARSOEM (1987): Mechanical response of wood to repeated loading III, Mokuzai Gakkaishi, Vol 33, N°8, p. 623-629.

[7] P.A. BORDONNE, S.N. MARSOEM, T. OKUYAMA (1987): Fatigue et dissipation d'énergie en traction modulée, Actes du 2ème colloque "Sciences et Industries du Bois" à Nancy, p.421-428.

[8] V. BUCUR (1986): Ondes ultrasonores dans le bois. Caractérisation mécanique et qualité de certaines essences de bois, Thèse, I.S.M.C.M. St OUEN.

[9] F. CAILLIEZ (1969): La comparaison de deux moyennes, Statistique Note N°3, Centre Technique Forestier Tropical.

[10] Compilation (1985): Digital Signal Analysis, BRÜEL & KJAER Danemark.

[11] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS (1987): Analyse mathématique et calcul numérique, Tome 3, MASSON, Paris.

[12] C. DEMARS (1981): Transformée de Fourier rapide, Micro-systèmes, Sept.-Oct., p.155-159.

[13] E. DIEULESAINT, D. ROYER (1974): Ondes élastiques dans les solides, MASSON, Paris.

[14] D. DOUAU (1986): Evaluation des propriétés acoustiques, mécaniques et structurelles des bois de tables d'harmonie de guitare ; leur influence sur le timbre de l'instrument, Thèse, Université du Maine.

[15] D. FENGEL, G. WEGENER (1984): WOOD. Chemistry, Ultrastructure, Reactions, DE GRUYTER, Berlin.

[16] J.D. FERRY (1980): Viscoelastic properties of polymers, JOHN WILEY & SONS, New York.

[17] J.M GENEVAUX, D. GUITARD (1988): Anisotropie du comportement différé : essai de fluage à température croissante d'un bois de peuplier, Actes du colloque "Comportement Mecanique du Bois" à Bordeaux, p.155-166.

[18] P. GERMAIN (1980): Cours de mécanique, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[19] E. GOENS (1931): Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen, Ann. d. Phys. II. p.649.

[20] J. GRIL (1988): Une modélisation du comportement hygro-rhéologique du bois à partir de sa microstructure, Thèse, Université Paris VI.

[21] E. GRÜNEISEN (1907): Die vorstehende Arbeit bzw. die Fortsetzung, Ann. d. Phys. 22. p.801.

[22] D. GUITARD (1987): Mécanique du matériau bois et composites, CEPADUES, Toulouse.

[23] R.F.S. HEARMON (1958): The influence of shear and rotatory inertia on the free flexural vibrations of wooden beams, Brit. J. Appl. Phys., 9, p.381

[24] T.C. HUANG (1961): The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions, J. Appl. Mech. Dec., p.579-584.

[25] C. HUET (1988): Quelques aspects du comportement thermo-hygro-viscoélastique du bois, Actes du colloque "Comportement Mecanique du Bois" à Bordeaux, p.103-118.

[26] K. ISHIHARA, N. SOBUE, T. TAKEMURA (1978): Effect of grain angle on complex Young's modulus E* of Spruce an Hoo, Mokuzai Gakkaishi, Vol.24, N°6, p.375-379.

[27] H. KAMIOKA, A. KATAOKA (1981): Elastic modulus and internal friction of woods by the longitudinal resonance method, Mokuzai Gakkaishi, Vol.28, N°6, p.336-345.

[28] A. KATAOKA, T. ONO (1975-6): The relations of experimental factors to the measuring values of dynamic mechanical properties of wood, part 1, Mokuzai Gakkaishi, Vol.21, N°10, p.543-550 ; part 2 (1976): ibid., Vol.22, N°1, p.1-7.

[29] A. KATAOKA, T. ONO (1976): The dynamic mechanical properties of sitka spruce used for sounding boards, Mokuzai Gakkaishi, Vol.22, N°8, p.436-443.

[30] C. KOLLMANN, M. KRECH (1960): Dynamische Messung der elastischen Holzeigenschaften und der Dämpfung, Holz als Roh- und Werkstoff, 18(2), p.41-54.

[31] J. LAUNAY, M. MUDRY, G. GILETTA (1986): Etude expérimentale de l'influence du taux d'humidité sur l'élasticité du bois, in Rhéologie des matériaux anisotropes, CR 19e colloque du Groupe Français de Rhéologie à Paris 1984, CEPADUES, Toulouse.

[32] C. LE GOVIC et al. (1987): Mise en évidence d'une équivalence temps température et modélisation du fluage du bois, Actes du 2ème colloque "Sciences et Industries du Bois" à Nancy, p.349-356.

[33] C. LE GOVIC (1988): La viscoélasticité du bois en liaison avec sa constitution polymérique, Rapport d'étude CTBA, Paris.

[34] D. LE NIZERHY (1973): Propriétés élastiques et viscoélastiques des matériaux composites, Projet final ECP, document I.S.M.C.M. St OUEN.

[35] D. LE NIZERHY, Y. CHEVALIER, T. VINH (1981): Vibrations de flexion des poutres anisotropes en matériau composite, Application à la détermination des modules de Young, Sci. Tech. Armement, 54, 2e fasc., p.291-324.

[36] M.E. McINTYRE, J. WOODHOUSE (1984-5): On measuring wood properties, part 1, J. Catgut Acoust. Soc. Vol 42, p.11-15 ; part 2, ibid. Vol 43, p.18-24.

[37] J. MANDEL (1978): Propriétés mécaniques des matériaux, EYROLLES, Paris.

[38] S.N. MARSOEM, P.A. BORDONNE, T. OKUYAMA (1987): Mechanical response of wood to repeated loading II, Mokuzai Gakkaishi, Vol 33, N°5, p.354-360.

[39] G.R. MOORE, D.E. KLINE (1983): Dynamic mechanical properties of epoxy poplar composites materials, Wood and Fiber Sci., 15(4), p.358-375.

[40] S. MORIIZUMI, M. FUSHITANI, J. KABURAGI (1971-3): Viscoelasticity and structure of wood, part 1, Mokuzai Gakkaishi, Vol 17, N°12, p.431-436 ; part 2 (1973): ibid., Vol 19, N°2, p.81-87 ; part 3 (1973): ibid., Vol 19, N°3, p.109-115.

[41] M. NORIMOTO (1982): Structure and properties of wood used for musical instruments, Mokuzai Gakkaishi, Vol 28, N°7, p.407-413.

[42] M. NORIMOTO et al. (1986): Specific dynamic Young's modulus and internal friction in the longitudinal direction. Wood Research and Technical Notes N°22, p.53-65.

[43] Norme soviétique GOST N°16483.31 (1974): Méthode de détermination à la résonance des modules d'élasticité et de cisaillement ainsi que des facteurs de perte.

[44] Note B&K : Measurement of the complex modulus of elasticity: A brief survey, Application notes, BRÜEL & KJAER, Danemark.

[45] T. OKUYAMA, A. ITOH, S.N. MARSOEM (1984): Mechanical response of wood to repeated loading, Mokuzai Gakkaishi, Vol 30, N°10, p.791-198.

[46] T. ONO, A. KATAOKA (1979): The frequency dependance of the dynamic Young's modulus and internal friction of wood used for soundboards of musical instruments, part 1, Mokuzai Gakkaishi, Vol.25, N°7, p.461-468 ; part 2, ibid., Vol.25, N°8, p.535-542.

[47] T. ONO, (1983): On dynamic mechanical properties in the trunks of wood for musical instruments, Holzforschung 37(5), p.245-250.

[48] T. ONO, M. NORIMOTO (1983): Study on Young's modulus and internal friction of wood in relation to the evaluation of wood for musical instruments, Jpn J. Appl. Phys. Vol.22, N°4, p.611-614.

[49] T. ONO, M. NORIMOTO (1984): On physical criteria for the selection of wood for soundboards of musical instruments Rheol. Acta 23, p.652-656.

[50] T. ONO, M. NORIMOTO (1985): Anisotropy of dynamic Young's modulus and internal friction in wood, Jpn J. Appl. Phys. Vol.24, N°8, p.960-964.

[51] B. PERSOZ (1960): Introduction à l'étude de la rhéologie, DUNOD, Paris.

[52] S. POLISZKO (1986): Anisotropy of dynamic wood viscoelasticity, in Rhéologie des matériaux anisotropes, CR 19e colloque du Groupe Français de Rhéologie à Paris 1984, CEPADUES, Toulouse.

[53] C. PREZIOSA, M. MUDRY, J. LAUNAY, F. GILETTA (1981) : Détermination des constantes élastiques du bois par une méthode acoustique goniométrique, C.R. Ac. Sci. Paris - Série II, p.91-94.

[54] J.W.S. RAYLEIGH (1894): The theory of sound (réédition 1945), Dover publications, New York.

[55] T.G. RIALS, W.G. GLASSER (1984): Characterizing wood components as network polymers by dynamic mechanical analysis, Wood and Fiber Sci., 16(4), p.537-542.

[56] M. ROSEAU (1984): Vibrations des systèmes mécaniques, MASSON, Paris.

[57] A.P. SCHNIEWIND, J.D. BARRETT (1972): Wood as a linear orthotropic viscoelastic material, Wood Sci. Technol., Vol.6, p.43-57

[58] E.J. SELLEVOLD et al. (1975): Low temperature internal friction and dynamic modulus for Beach wood, Wood and Fiber, Vol 7(3), p.162-169.

[59] N. SOBUE, T. TAKEMURA (1979): Poisson's ratios in dynamic viscoelasticity of wood as two-dimensional materials. Mokuzai Gakkaishi, Vol.25, N°4, p.258-263.

[60] N. SOBUE, Y. IWASAKI (1981): Effect of veneer construction on anisotropy of dynamic vicoelasticity of plywood. Mokuzai Gakkaishi, Vol.27, N°6, p.457-462

[61] N. SOBUE (1983): Prediction of dynamic Young's modulus and loss tangent of plywood in bending. Mokuzai Gakkaishi, Vol.29, N°1, p.14-19.

[62] N. SOBUE (1986): Instantaneous measurement of elastic constants by analysis of the Tap Tone of wood, Application to flexural vibration of beams. Mokuzai Gakkaishi, Vol.32, N°4, p.274-279.

[63] N. SOBUE (1986): Measurement of Young's modulus by the transient longitudinal vibration of wooden beams using a FFT Spectrum Analyser, Mokuzai Gakkaishi, Vol.32, N°9, p.744-747.

[64] N. SOBUE (1988): Simultaneous determination of Young's modulus and shear modulus of structural lumber by complex vibrations of bending and twisting. Mokuzai Gakkaishi, Vol.34, N°8, p.652-657.

[65] M. SUZUKI (1979): Internal friction of wood in relation to wooden structure, Mokuzai Gakkaishi, Vol.25, N°10, p.623-629.

[66] M. SUZUKI (1980): Relationship between specific gravity and decrement of dynamic Young's modulus with water, Mokuzai Gakkaishi, Vol.26, N°5, p.299-304.

[67] R.C. TANG, N.N. HSU (1972): Dynamic Young's moduli of wood related to moisture content, Wood Science, Vol 5, N°1, p.7-14.

[68] S. TIMOSHENKO (1947): Théorie des vibrations (traduction), Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège.

[69] R. TOMASSONE, E. LESQUOY, C.MILLIER (1983): La régression, MASSON, Paris.

[70] M. TONOSAKI, T. OKANO, T. ASANO (1983): Vibrational properties of Sitka spruce with longitudinal vibration and flexural vibration, Mokuzai Gakkai-shi, Vol.29, N°9, p.547-552.

[71] J. TRAMPE BROCH (1984): Mechanical vibration and shock measurements, BRÜEL & KJAER Danemark.

[72] L. TRONG (1986): La résistance à la pourriture des panneaux contreplaqués et des panneaux de particules : étude expérimentale d'une méthode d'essai en conditions non stréríles, Thèse, Université Nancy I.

[73] A. VAFAI, M. FARSHAD, A. AHMADIEH (1976): Determination of modulus of elasticity of wood from vibrating reed measurements, Fibre Sci. Technol., (9), p.1-10.

[74] J. VENET (1974): Identification et classement des bois français, ENGREF, Nancy.

[75] T. VINH (1981): Mesures ultrasonores de constantes élastiques des matériaux composites, Sci. Tech. Armement, 54, 2e fasc., p.265-288.

[76] T. VINH, M. CHEVALIER, D. LE NIZERHY : Mécanique des matériaux composites (1ère partie), Institut supérieur des matériaux et de la construction mécanique (I.S.M.C.M.), SAINT OUEN.

[77] S.C. WANG, O. SUCHSLAND, J.H. HART (1980): Dynamic test for evaluating decay in wood, For. Prod. J., Vol 30, N°7, p.35-36

[78] H. YANO, T. YAMADA (1985): The dynamic mechanical properties of wood in the radial direction. Mokuzai Gakkaishi, Vol.31, N°3, p.222-230.

## ГОСТ 16483.31 - 74 [39]

BOIS - Méthode de détermination par résonance, des modules d'élasticité et de cisaillement, ainsi que des facteurs de perte.

N.B. Il ne s'agit pas d'une traduction officielle : les schémas sont conformes à l'original, mais de nombreuses références à d'autres normes soviétiques ne sont pas reproduites.

En outre, n'est pas reproduite la marche à suivre spécifiée pour évaluer les propriétés à 12% et 15%, en fonction des propriétés et de l'humidité au moment de l'essai.

### 1. Appareillage (fig. 1)

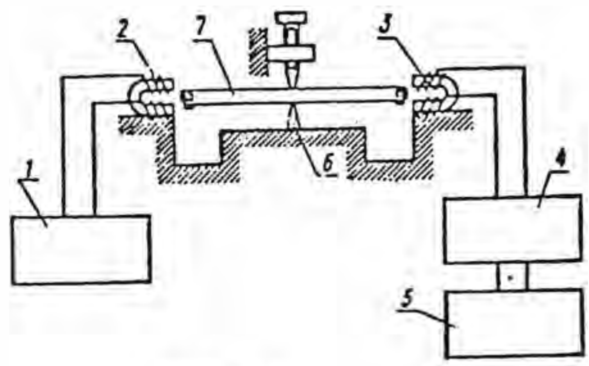



figure 1

légende :

1 : Générateur de signaux
2 : Excitateur
3 : Récepteur
4 : Millivoltmètre
5 : Fréquencemètre
6 : Aiguilles de fixation
7 : Eprouvette

### 2. Eprouvette d'essai

Les dimensions nominales de l'éprouvette d'essai sont 20x20x300 $mm^3$

La préparation, les tolérances et le nombre d'échantillons sont spécifiés par la norme ГОСТ 16483.0 (recommandations générales)

Particularité : Si l'étude porte sur des bois de plantation, le nombre d'éprouvettes doit être supérieur à 35.

### 3. Préparation

3.1. L'épaisseur h de l'éprouvette suivant la direction tangentielle, et la largeur b de l'éprouvette suivant la direction radiale sont mesurées avec une précision inférieure à 0,1 millimètre.

La longueur l de l'éprouvette suivant la direction longitudinale, est mesurée avec une précision inférieure à 1 millimètre.

3.2. La masse de l'éprouvette est mesurée avec une précision inférieure à 0,1 gramme.

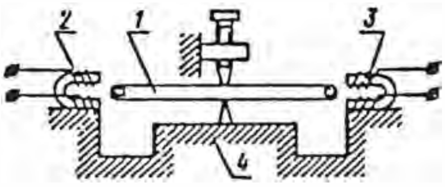
3.3. Les quatre faces latérales de l'éprouvettes sont percées d'un trou de diamètre 0,8 millimètre et de profondeur 7 à 8 millimètres, à l'intersection des diagonales.

3.4. Trois pastilles ferromagnétiques sont collées à chacune des extrémités, en vue de la réalisation de trois essais distincts (1 en vibrations axiales, 2 en vibrations transversales). La surface recommandée pour ces pastilles est 5x5 mm², leur masse est inférieure à 1 gramme.

3.5 La masse de l'éprouvette est à nouveau mesurée avec une précision inférieure à 0,1 gramme.

L'éprouvette est supportée au moyen de deux aiguilles verticales de 1 millimètre de diamètre et de 10 millimètres de longueur

3.6 La configuration du dispositif pour l'étude des vibrations axiales est représentée par la figure 2.a ; les transducteurs doivent être positionnés à une distance inférieure à 1 millimètre des extrémités de l'éprouvette.




légende :

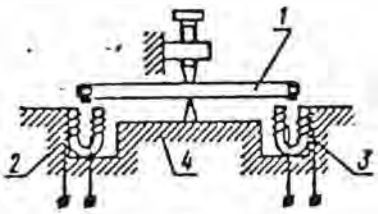
1 : éprouvette
2 : transducteur d'excitation
3 : transducteur de mesure
4 : support

figure 2.a : vibrations axiales

3.7 En faisant varier la fréquence du générateur entre 6 et 12 KHz, déterminer avec une précision de 0,1 Hertz, la fréquence correspondant au maximum de l'amplitude du mouvement (première harmonique).

Puis déterminer avec une précision de 1 Hertz, les deux fréquences correspondant à l'amplitude égale à la moitié de ce maximum.

3.8 La configuration du dispositif pour l'étude des vibrations transversales est représentée par la figure 2.b ; les transducteurs doivent être positionnés à une distance inférieure à 2 millimètres des extrémités de l'éprouvette.




légende :

1 : éprouvette
2 : transducteur d'excitation
3 : transducteur de mesure
4 : support

figure 2.b : vibrations transversales

3.9 Procédant comme en 3.7, en faisant varier la fréquence du générateur entre 1,5 et 3,5 KHz, déterminer avec une précision de 0,1 Hertz, la fréquence correspondant au maximum de l'amplitude du mouvement (deuxième harmonique), puis les deux fréquences correspondant à l'amplitude égale à la moitié de ce maximum.

3.10 Répéter 3.8 et 3.9, après avoir changé l'orientation de l'éprouvette.

3.11 Après l'essai, déterminer le taux d'humidité de l'éprouvette en prélevant un fragment dans sa partie centrale (norme ГОСТ 16483.7)

## 4 Mise en forme des résultats

4.1 Calculer le module d'élasticité $E_H$, à l'humidité H, à l'aide de l'expression :

$$E_H = 4 \cdot \frac{lm\beta^2}{bh} \cdot f_L$$

Exprimer le résultat à $25 \cdot 10^6$ Pascal près.

b, h et l = dimensions de l'éprouvette (m);
m = masse de l'éprouvette seule, déterminée en 3.2 (Kg);
$f_L$ = fréquence de résonance en vibrations axiales (Hz);
$\beta$ = rapport de la masse déterminée en 3.4 à m, déterminée en 3.2, calculé à $5 \cdot 10^{-3}$ près.

4.4 Calculer le module de cisaillement $G_H$, dans le plan TL et à l'humidité H, a l'aide de l'expression :

$$G_H = \frac{41,78\ \beta^2 \left(4,67 - \dfrac{f_{TF}^2}{f_L^2}\right)}{\dfrac{A}{f_{TF}^2} - \dfrac{B}{f_L^2}}$$

Exprimer le résultat à $25 \cdot 10^6$ Pascal près.

$f_{TF}$ = fréquence de résonance en vibrations transversales, dans le plan tangentiel (Hz)

$$A = 385,77 \cdot \frac{bh}{l}$$

$$B = \left(12 \cdot \frac{l^2}{h^2} + 108,92\right) \cdot \frac{bh}{l}$$

Le module de cisaillement dans le plan RL est obtenu en remplaçant $f_{TF}$ par $f_{RF}$ (fréquence de résonance en vibrations tranxversales, dans le plan radial) et en échangeant les valeurs de b et h dans l'expression de B.

4.7 Déterminer à $5.10^{-5}$ près, les valeurs du décrément logarithmique $\delta$ à l'aide des expressions :

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{f' - f''}{f}$$

où f' et f" sont les fréquences correspondant à la moitié de l'amplitude observée à la fréquence de résonance f.

# ANNEXES

ANNEXE A : Valeur prédictive de l'approximation de Bernoulli

N.B. $X^*$ est la racine de rang indiqué, de l'équation présentée en III.2 :

$$H\left[ X^*,\ \frac{h^2}{12l^2},\ \frac{E}{KG}\cdot\frac{h^2}{12l^2} \right] = 0$$

$X = m^4$ est la racine de même rang, de l'équation H( X, 0, 0 ) = 0, qui équivaut à cos(m).ch(m) = 1

| E/KG \| l/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7.1 | 3.2 | 1.8 | 1.2 | 0.8 | 0.3 | 0.1 |
| 5 | 9.1 | 4.1 | 2.3 | 1.5 | 1 | 0.4 | 0.1 |
| 10 | 14 | 6.3 | 3.6 | 2.3 | 1.6 | 0.6 | 0.1 |
| 15 | 19 | 8.6 | 4.8 | 3.1 | 2.2 | 0.8 | 0.2 |
| 20 | 24 | 10.8 | 6.1 | 3.9 | 2.7 | 1 | 0.2 |
| 25 | 29.1 | 13.1 | 7.4 | 4.7 | 3.3 | 1.2 | 0.3 |
| 30 | 34.1 | 15.3 | 8.7 | 5.6 | 3.9 | 1.4 | 0.4 |

Tableau A1 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X-X^*}{X^*}\right]$ dans le premier mode propre

| E/KG \| l/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 20.0 | 9.0 | 5.1 | 3.3 | 2.3 | 0.8 | 0.2 |
| 5 | 27.3 | 12.3 | 7.0 | 4.5 | 3.1 | 1.1 | 0.3 |
| 10 | 45.9 | 20.7 | 11.7 | 7.5 | 5.2 | 1.9 | 0.5 |
| 15 | 64.7 | 29.1 | 16.5 | 10.6 | 7.4 | 2.7 | 0.7 |
| 20 | 83.7 | 37.5 | 21.2 | 13.6 | 9.5 | 3.4 | 0.9 |
| 25 | 102.9 | 46 | 26 | 16.7 | 11.6 | 4.2 | 1.1 |
| 30 | 122.2 | 54.5 | 30.8 | 19.8 | 13.7 | 5 | 1.2 |

Tableau A2 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X-X^*}{X^*}\right]$ dans le second mode propre

ANNEXE A : Valeur prédictive de l'approximation de Bernoulli

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 38.1 | 17.4 | 9.9 | 6.4 | 4.4 | 1.6 | 0.4 |
| 5 | 53.6 | 24.4 | 13.9 | 9.0 | 6.3 | 2.3 | 0.6 |
| 10 | 93.0 | 42.2 | 24.0 | 15.5 | 10.8 | 3.9 | 1.0 |
| 15 | 133.0 | 60.1 | 34.1 | 22.0 | 15.3 | 5.5 | 1.4 |
| 20 | 173.2 | 78.0 | 44.3 | 28.5 | 19.9 | 7.2 | 1.8 |
| 25 | 213.6 | 96.1 | 54.5 | 35.0 | 24.4 | 8.8 | 2.2 |
| 30 | 253.9 | 114.1 | 64.6 | 41.6 | 28.9 | 10.5 | 2.6 |

Tableau A3 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X- X^*}{X^*}\right]$ dans le troisième mode propre

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 61.6 | 28.3 | 16.2 | 10.5 | 7.3 | 2.7 | 0.7 |
| 5 | 88.2 | 40.4 | 23.1 | 14.9 | 10.4 | 3.8 | 1 |
| 10 | 156.5 | 71.0 | 40.5 | 26.1 | 18.2 | 6.6 | 1.7 |
| 15 | 226.1 | 101.9 | 58 | 37.4 | 26.1 | 9.5 | 2.4 |
| 20 | 296.2 | 133.1 | 75.5 | 48.6 | 33.9 | 12.3 | 3.1 |
| 25 | 366.6 | 164.3 | 93.1 | 59.9 | 41.8 | 15.2 | 3.8 |
| 30 | 436.9 | 195.6 | 110.7 | 71.2 | 49.6 | 18.0 | 4.5 |

Tableau A4 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X- X^*}{X^*}\right]$ dans le quatrième mode propre

ANNEXE A : Valeur prédictive de l'approximation de Bernoulli

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 90.2 | 41.7 | 24.0 | 15.5 | 10.9 | 4.0 | 1.0 |
| 5 | 130.8 | 60.1 | 34.5 | 22.3 | 15.6 | 5.7 | 1.4 |
| 10 | 236.2 | 106.9 | 61.0 | 39.4 | 27.6 | 10.1 | 2.5 |
| 15 | 343.5 | 154.5 | 87.8 | 56.7 | 39.6 | 14.4 | 3.6 |
| 20 | 451.1 | 202.4 | 114.8 | 74.0 | 51.6 | 18.8 | 4.7 |
| 25 | 558.8 | 250.4 | 141.8 | 91.3 | 63.7 | 23.1 | 5.8 |
| 30 | 666.4 | 298.4 | 168.9 | 108.7 | 75.8 | 27.5 | 6.9 |

Tableau A5 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X- X^*}{X^*}\right]$ dans le cinquième mode propre

ANNEXE B : Valeur prédictive de l'approximation linéaire $X_B$

$$\frac{m^4}{X_B} = 1 + \alpha.F_1(m) + \Gamma.F_2(m) \qquad \text{(cf. B.III.5)}$$

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | - 0.1 | - | - | - | - | - | - |
| 5 | - 0.2 | - | - | - | - | - | - |
| 10 | - 0.3 | - 0.1 | - | - | - | - | - |
| 15 | - 0.4 | - 0.1 | - | - | - | - | - |
| 20 | - 0.5 | - 0.1 | - | - | - | - | - |
| 25 | - 0.5 | - 0.1 | - | - | - | - | - |
| 30 | - 0.6 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - | - |
| 40 | - 0.6 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - | - |

Tableau B1 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_B - X^*}{X^*}\right]$

( $m = 4.7300$ <=> 1er mode )

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | - 0.5 | - 0.1 | - | - | - | - | - |
| 5 | - 0.8 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - | - |
| 10 | - 1.1 | - 0.3 | - 0.1 | - 0.1 | - | - | - |
| 15 | - 1.2 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - |
| 20 | - 1.1 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - |
| 25 | - 1 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - 0.1 | - | - |
| 30 | - 0.9 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - 0.1 | - | - |
| 40 | - 0.6 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - 0.1 | - | - |

Tableau B2 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( $m = 7.8532$ <=> 2nd mode )

ANNEXE B : Valeur prédictive de l'approximation linéaire $X_B$

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | - 1.5 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - | - | - |
| 5 | - 2 | - 0.6 | - 0.2 | - 0.1 | - 0.1 | - | - |
| 10 | - 2.5 | - 0.9 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - | - |
| 15 | - 2.6 | - 1.1 | - 0.5 | - 0.3 | - 0.1 | - | - |
| 20 | - 2.6 | - 1.2 | - 0.6 | - 0.3 | - 0.1 | - | - |
| 25 | - 2.5 | - 1.2 | - 0.6 | - 0.3 | - 0.2 | - | - |
| 30 | - 2.5 | - 1.2 | - 0.6 | - 0.4 | - 0.2 | - | - |
| 40 | - 2.4 | - 1.3 | - 0.7 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - |

Tableau B3 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( m = 10.9956 <=> 3ème mode )

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | - 3.0 | - 1.0 | - 0.4 | - 0.2 | - 0.1 | - | - |
| 5 | - 3.6 | - 1.3 | - 0.6 | - 0.3 | - 0.1 | - | - |
| 10 | - 3.8 | - 1.8 | - 0.9 | - 0.4 | - 0.2 | - | - |
| 15 | - 3.6 | - 1.9 | - 1 | - 0.5 | - 0.3 | - 0.1 | - |
| 20 | - 3.3 | - 1.9 | - 1.1 | - 0.6 | - 0.4 | - 0.1 | - |
| 25 | - 3.0 | - 1.9 | - 1.1 | - 0.7 | - 0.4 | - 0.1 | - |
| 30 | - 2.8 | - 1.9 | - 1.1 | - 0.7 | - 0.4 | - 0.1 | - |
| 40 | - 2.6 | - 1.8 | - 1.1 | - 0.7 | - 0.5 | - 0.2 | - |

Tableau B4 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_B - X^*}{X^*}\right]$

( m = 14.1372 <=> 4ème mode )

ANNEXE B : Valeur prédictive de l'approximation linéaire $X_B$

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | - 4.7 | - 1.8 | - 0.7 | - 0.4 | - 0.2 | - | - |
| 5 | - 5.2 | - 2.3 | - 1.0 | - 0.5 | - 0.3 | - | - |
| 10 | - 4.9 | - 2.7 | - 1.4 | - 0.8 | - 0.5 | - 0.1 | - |
| 15 | - 4.3 | - 2.7 | - 1.6 | - 0.9 | - 0.6 | - 0.1 | - |
| 20 | - 3.9 | - 2.6 | - 1.6 | - 1.0 | - 0.6 | - 0.1 | - |
| 25. | - 3.6 | - 2.5 | - 1.6 | - 1.1 | - 0.7 | - 0.1 | - |
| 30 | - 3.4 | - 2.4 | - 1.6 | - 1.1 | - 0.7 | - 0.1 | - |
| 40 | - 3.2 | - 2.3 | - 1.6 | - 1.1 | - 0.8 | - 0.2 | - |

Tableau B5 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( m = 17.2788 <=> 5ème mode )

ANNEXE C : Valeur prédictive de l'approximation de Goens $X_G$

$$\frac{m^4}{X_G} = 1 + \alpha.F_1(m) + \Gamma.F_2(m) - X.\alpha.\Gamma \qquad \text{(cf. B.III.5)}$$

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | - | - | - | - | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | - | - |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - |
| 15 | - | - | - | - | - | - | - |
| 20 | 0.1 | - | - | - | - | - | - |
| 25 | 0.1 | - | - | - | - | - | - |
| 30 | 0.1 | - | - | - | - | - | - |
| 40 | 0.4 | 0.1 | - | - | - | - | - |

Tableau C1 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( m = 4.7300 <=> 1er mode )

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.1 | - | - | - | - | - | - |
| 5 | 0.3 | - | - | - | - | - | - |
| 10 | 0.7 | 0.1 | - | - | - | - | - |
| 15 | 1.2 | 0.2 | 0.1 | - | - | - | - |
| 20 | 1.8 | 0.3 | 0.1 | - | - | - | - |
| 25 | 2.3 | 0.5 | 0.1 | 0.1 | - | - | - |
| 30 | 2.7 | 0.6 | 0.2 | 0.1 | - | - | - |
| 40 | 3.5 | 0.9 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | - | - |

Tableau C2 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( m = 7.8532 <=> 2nd mode )

ANNEXE C : Valeur prédictive de l'approximation de Goens $X_G$

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.6 | 0.1 | - | - | - | - | - |
| 5 | 1.2 | 0.2 | - | - | - | - | - |
| 10 | 2.7 | 0.5 | 0.1 | - | - | - | - |
| 15 | 4 | 0.8 | 0.2 | 0.1 | - | - | - |
| 20 | 5 | 1.1 | 0.3 | 0.1 | - | - | - |
| 25 | 5.9 | 1.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 | - | - |
| 30 | 6.5 | 1.6 | 0.5 | 0.2 | 0.1 | - | - |
| 40 | 7.4 | 2 | 0.7 | 0.3 | 0.1 | - | - |

Tableau C3 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( m = 10.9956 <=> 3ème mode )

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2.1 | 0.3 | 0.1 | - | - | - | - |
| 5 | 3.8 | 0.6 | 0.1 | - | - | - | - |
| 10 | 7.3 | 1.4 | 0.4 | 0.1 | - | - | - |
| 15 | 10 | 2.2 | 0.6 | 0.2 | 0.1 | - | - |
| 20 | 11.9 | 2.8 | 0.9 | 0.3 | 0.1 | - | - |
| 25 | 13.3 | 3.4 | 1.1 | 0.4 | 0.2 | - | - |
| 30 | 14.4 | 3.8 | 1.3 | 0.5 | 0.2 | - | - |
| 40 | 15.9 | 4.5 | 1.7 | 0.7 | 0.3 | - | - |

Tableau C4 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( m = 14.1372 <=> 4ème mode )

ANNEXE C : Valeur prédictive de l'approximation de Goens $X_G$

| E/KG \| 1/h : | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5.1 | 0.8 | 0.2 | 0.1 | - | - | - |
| 5 | 8.1 | 1.5 | 0.4 | 0.1 | - | - | - |
| 10 | 15.3 | 3.2 | 0.9 | 0.3 | 0.1 | - | - |
| 15 | 19.6 | 4.6 | 1.5 | 0.6 | 0.2 | - | - |
| 20 | 22.6 | 5.7 | 2.0 | 0.8 | 0.4 | - | - |
| 25 | 24.6 | 6.6 | 2.4 | 1 | 0.5 | - | - |
| 30 | 26.1 | 7.2 | 2.7 | 1.2 | 0.6 | 0.1 | - |
| 40 | 28.1 | 8.2 | 3.3 | 1.5 | 0.8 | 0.1 | - |

Tableau C5 : Ecart relatif $100.\left[\frac{X_G - X^*}{X^*}\right]$

( m = 17.2788 <=> 5ème mode )

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur THIBAUT, Chargé de Recherches CNRS, USTL Montpellier,
Monsieur VINH, Professeur.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur Pierre-Antoine BORDONNE

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Module dynamique et frottement intérieur du bois sans défaut. Mesures sur poutres flottantes en vibrations transversales"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : "Sciences du Bois"

Fait à Vandoeuvre le, 2 Mars 1989
Le Président de l'I.N.P.L.,

M.GANDOIS

2, avenue de la Forêt de Haye - B.P. 3 - 54501 VANDŒUVRE CEDEX
Téléphone : 83. 57. 48. 48 - Télex : 961 715 F - Télécopie : 83. 57. 49. 55