Les nombres, instruments de contrôle du monde sensible et portes ouvertes sur l'inconnaissable

Philippe Lemoisson

Janvier 2023

Les nombres-signes, cailloux pour compter les moutons

Les premières traces de numération prennent la forme d'entailles sur des os (Afrique du sud : -35 000). En 8000 av. J.-C., pour laisser une trace de leurs différentes transactions, les Sumériens attribuèrent différentes valeurs à de petits jetons en argile, appelés *calculi*, dont la valeur dépendait de leur taille et de leur forme : le petit cône pour l'unité, la bille pour la dizaine, le grand cône pour la soixantaine, le grand cône perforé pour dix soixantaines. Ces jetons d'argiles que l'on pourrait apparenter à nos actuelles pièces de monnaie, étaient glissés dans une sphère creuse en argile marquée par des sceaux qui en garantissaient l'origine et l'intégralité. Ainsi, par exemple, si la bulle de terre contenait le dénombrement d'un troupeau confié à un berger, lorsque celui-ci le ramenait, il leur suffisait de briser la bulle-enveloppe pour vérifier qu'aucune bête ne manquait. Petit à petit, l'homme commença à noter le contenu de la bulle d'argile sur le dessus de celle-ci, afin de réaliser des contrôles intermédiaires sans avoir à la casser : les petits *calculi* devinrent inutiles et les bulles-enveloppes se transformèrent en tablettes. Ainsi, c'est une invention majeure qui permit une nouvelle avancée dans l'histoire de la numération : l'apparition de l'écriture. Plus tard, dans la Croissant Fertile, durant la période d'Uruk, le développement des institutions étatiques s'accompagne de celui des instruments de gestion permettant l'encadrement des travailleurs et des autres ressources ; l'écriture combinant descriptions et numérations apparaît vers -3400.

Différents systèmes de numérations, additionnels (quand chaque signe représente une quantité fixe) ou positionnels (quand la place du signe permet de dénoter la taille du paquet qui est compté) apparaissent au cours des Histoires. Georges Ifrah écrit dans l'*Histoire universelle des chiffres* (ISBN 2-7242-8461-5, page 15) :
« Une numération de position est un système où un symbole n'a pas la même valeur s'il est placé au rang des unités du premier, du deuxième ou du troisième ordre. Cette découverte essentielle a échappé à la majorité des peuples de l'histoire. Elle n'a eu lieu que quatre fois :

- au début du IIème millénaire avant notre ère, chez les savants de Babylone
- juste avant le début de notre ère par les mathématiciens chinois
- entre le IIIème et le IVème siècles de notre ère par les astronomes mayas
- aux alentours du Vème siècle de notre ère par les mathématiciens de l'Inde

Seul le zéro indien offrait les mêmes possibilités que celui que nous utilisons aujourd'hui ».

De fait, notre système actuel de numération positionnelle en base 10, a été inventé par les mathématiciens indiens qui jusqu'au Vème siècle, restent dans une tradition orale, puis ensuite rayonnent dans le monde entier. Dans la philosophie hindoue, le vide et l'infini sont dans l'essence même du cosmos. En 628, *Brahmagupta*, un astronome indien et l'un des plus grands mathématiciens de son époque, achève son premier ouvrage : le *Brahmasphutasiddhanta* où il présente un système positionnel en base 10, définit le zéro, les nombres négatifs et décrit leurs propriétés mathématiques :

- le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même vaut zéro
- un nombre auquel on ajoute ou soustrait zéro reste inchangé

Choisir les bons cailloux pour les bons problèmes

Dans le Système binaire, tout nombre s'écrit comme une suite de *0* et de *1* qui correspondent chacun au coefficient multiplicateur d'une puissance de *2*.

Dans le Système ternaire équilibré, tout nombre s'écrit comme une suite de *-1*, *0*, *1* qui correspondent chacun au coefficient multiplicateur d'une puissance de *3*. Ce suytème est parfaitement adapté à l'électronique où le potentiel peut être négatif, neutre ou positif. En 1958 un Ordinateur ternaire, le Setun, est développé à Moscou par des universitaires ; son système est basé sur une logique à trois états. Avant que l'URSS n'ait accès aux transistors, les (50) machines Setun étaient plus rapides et moins gourmandes en énergie que les ordinateurs binaires.

Dans « *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* », Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) traite le problème suivant :

Problème : Trouver une série de poids avec lesquels on puisse faire toutes les pesées en nombres entiers depuis 1 jusqu'à la somme des poids employés, cette somme étant la plus grande possible relativement au nombre de ces poids.

Solution : On utilise les poids de masse 1, 3, 3^2, 3^3, … 3^{p-1} pour faire toutes les pesées en nombres entiers depuis 1 jusqu'à $(3^p -1)/2$.

Jusqu'à Pythagore (-580 ; -495) l'homme espère expliquer le monde à travers les nombres entiers et leurs rapports (nombre rationnels). Dans ce monde, tout est « commensurable » ! mais un jour son meilleur disciple *Hippase de Métaponte* (qui fut peut-être le Maître d'Héraclite), découvreur notamment de la construction du pentagone régulier, prouve que certains nombres constructibles à la règle et au compas ne peuvent pas s'écrire comme des rapports de nombres entiers, ils sont « irrationnels » à l'instar de la diagonale du carré de côté 1 qui vaut $\sqrt{2}$. La découverte de l'incommensurabilité jeta le trouble dans la confrérie et ouvrit une profonde crise philosophique.

Les nombres-concepts, cailloux pour les jeux de l'esprit

Dès l'Antiquité égyptienne ou babylonienne, les scribes disposaient de procédures pour déterminer une quantité soumise à certaines conditions. Au 3ème siècle de l'ère chrétienne, Diophante d'Alexandrie pratique une forme d'algèbre pré-symbolique en introduisant une inconnue sur laquelle il opère des calculs. En 711, un jeune commandant arabe de 20 ans défait avec 2000 cavaliers une armée de 50 000 hommes et envahit le delta de l'Indus ; le système indien, sera transmis par les arabes à l'Occident médiéval et se développera sous l'impulsion du pape Gerbert d'Aurillac (945-1003), mais mettra plusieurs siècles à supplanter le système de numération romain. Ce système sera promu par le mathématicien italien Léonard de Pise, dit Fibonacci.

Vers 825, dans une époque d'essor des sciences et techniques islamiques, le mathématicien d'origine persane Al-Khwarizmi est à Bagdad. Il rédige un ouvrage dédié au calcul d'héritage, à l'arpentage, aux échanges commerciaux : « *al-djabr* ». Le titre de ce livre signifie réduction d'une fracture, réunion des morceaux, reconstruction, connexion, restauration, reboutement.

Par la suite, le mot « *algèbre* » désignera la science de transformation /résolution des *équations*. Notons que le mot *chiffre* vient de l'arabe *sifr* qui signifie «vide» et le mot zéro vient de l'ancien italien *zefiro* qui lui-même vient de l'arabe sifr.

Dans l'histoire des mathématiques, des ensembles de nombres de plus en plus puissants sont inventés pour traiter de problèmes de plus en plus ambitieux : les entiers naturels, les entiers relatifs, les rationnels, les réels, les complexes …

Dans le « monde des idées » cher aux Grecs et où la mathématique est reine, l'homme peut se poser des questions du type « *Quels sont les entiers naturels qui n'ont que 2 diviseurs ?* ». Dans ce monde des idées mathématiques :

- une *quantité* est une classe d'équivalence de collections ;
- une *équation* est une classe d'équivalence de problèmes ;
- un *problème d'arithmétique* est une classe d'équivalence de questions propres aux *quantités* ;
- un *problème d'algèbre* est une classe d'équivalence de questions propres aux *équations*.

Les limites du contrôle, cailloux dans la chaussure

Pour régler la question des fondements des mathématiques, Hilbert conçoit un programme dont il établit les prémisses en 1900 dans l'introduction à sa célèbre liste de problèmes, le second problème étant celui de la cohérence de l'arithmétique.

Mais en 1930, Gödel expose ses deux théorèmes d'incomplétude, qui seront publiés en 1931. Pour appréhender ses deux théorèmes, il faut accepter trois définitions :

Définition 1 : une théorie est cohérente si on ne peut pas y démontrer à la fois un énoncé et son contraire

Définition 2 : une théorie est complète si tous les énoncés vrais sont démontrables

Définition 3 : une théorie est récursivement axiomatisable si on peut reconnaître de façon purement mécanique les axiomes parmi les énoncés du langage de la théorie.

Théorème 1 *:* Dans n'importe quelle théorie récursivement axiomatisable, cohérente et capable de formaliser l'arithmétique, on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut être ni démontré ni réfuté dans cette théorie.

Théorème 2 *:* Si T est une théorie cohérente récursivement axiomatisable, cohérente et capable de formaliser l'arithmétique, la cohérence de T, qui peut s'exprimer dans la théorie T, n'est pas démontrable dans T.

La démonstration de Gödel, est la mise en mathématiques rigoureuses d'une intuition basée sur la proposition [G = *'la proposition G n'est pas démontrable à partir des axiomes de la théorie'*]. Si G est vraie elle n'est pas démontrable et donc la théorie qui la contient n'est pas complète. Si G est fausse elle est démontrable et donc la théorie qui la contient n'est pas cohérente.

Les théorèmes d'incomplétude de Gödel mettront fin aux espoirs fondés par Hilbert et déclencheront une crise profonde dans le monde des mathématiques. Les nombres, initialement apparus comme des instruments de contrôle du monde sensible, ont montré les limites du contrôle.

Une vue sur les cailloux qui donne le vertige

A partir d'énoncés mathématiques très simples, l'homme peut aujourd'hui construire des ensembles de nombres dont les tentatives de représentation sont fascinantes et vertigineuses.

C'est le cas des nombres premiers, qui depuis des siècles fascinent une communauté de mathématiciens.

C'est également le cas des fractales, qui à partir d'une simple équation produisent des formes à la beauté étonnante, telles les fractales construites à partir d'une question posée aux suites de Mandelbrot.

Les nombres deviennent alors des portes ouvertes sur l'inconnaissable.